This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

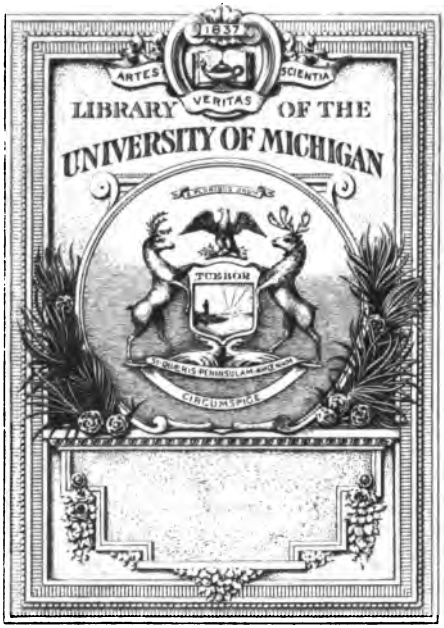
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
95
.A287
1921
v.1

MATHEMATISCHE UNTERHALTUNGEN UND SPIELE

VON

DR. W. AHRENS

IN ROSTOCK

DRITTE, VERBESSERTE, ANASTATISCH GEDRUCKTE AUFLAGE

ERSTER BAND

MIT 200 FIGUREN IM TEXT

VERLAG VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG UND BERLIN 1921

SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA
COPYRIGHT 1921 BY B G. TEUBNER IN LEIPZIG

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Math.
Harvard.
2-9-28
16233
2 v.

Seite

Kapitel VII. Brettspiele 163
§ 1. Mathematik und Brettspiele 163
§ 2. Die einfachste Form des Mühlespiels 172
§ 3. Schaf und Wolf 177

Kapitel VIII. Das Nonnen- oder Einsiedler-(Solitär-)spiel 182
§ 1. Spielregel. Notation. Problemstellung 182
§ 2. Spezielle Aufgaben. — Die „Hauptaufgabe" des Spiels; Lösungen von Reiß 186
§ 3. Symmetrie des Brettes; Reziprozität von „Hauptaufgaben" 193
§ 4. Erweiterte Spielregel Reiß'. Kriterien der Unlösbarkeit 195
§ 5. Das Solitärspiel mit 33 Löchern 202
§ 6. Tripelzüge 204
§ 7. Das Solitärspiel mit 37 Löchern 205
§ 8. Das Solitärspiel mit 41 Löchern 208

Kapitel IX. Das Achtköniginnenproblem 211
§ 1. Historische Einleitung 211
§ 2. Die Aufgabe auf dem Brett von 16 Feldern 213
§ 3. Das Brett von 25 Feldern 215
§ 4 Zusammengehörige Lösungen. Das Brett der 36 Felder 217
§ 5. Die Lösungen für die verschiedenen Werte von n (von $n = 4$ bis $n = 12$) 225
§ 6. Das Auftreten der verschiedenen Felder und Farben in den Lösungen 233
§ 7. Methoden zur Auffindung der Lösungen. Beweis der Existenz von Lösungen für jedes $n > 3$ 242
§ 8. Über symmetrische und partiell-symmetrische Lösungen 249
§ 9. Die entsprechenden Probleme für die übrigen Figuren des Schachspiels. Anzahl der Lösungen für die Turm- und Läuferprobleme 259

Anhang. Zugzahlen der verschiedenen Figuren 273
A. Gesamtanzahl der Züge der verschiedenen Figuren . 273
B. Anzahl der Züge der verschiedenen Figuren von den einzelnen Feldern aus. 278
C. Minimalzahl der für den Übergang zwischen zwei Feldern erforderlichen Züge der verschiedenen Figuren; Anzahl solcher Übergangsbahnen 280

Kapitel X. Die 5 Königinnen auf dem Schachbrett. . . . 285
§ 1. Problemstellung 285
§ 2. Bretter von 4, 9, 16, 25, 49 Feldern 287
§ 3. Der Fall des gewöhnlichen Schachbretts 293

erscheinen mag, leitet seine Existenzberechtigung aus einer Zuschrift aus dem Leserkreise her.

Die zahlreichen mir zu Gesicht gekommenen Besprechungen der ersten Ausgabe haben diese durchweg beifällig und jedenfalls mit großem Wohlwollen beurteilt. Der Autor selbst kennt naturgemäß die Schwächen seiner Arbeit am besten. So war ich mir z. B. sehr wohl bewußt, daß die historischen Einleitungen mehrfach durchaus unzureichend waren, und ich schätze es daher als ein besonderes Glück, daß zwei historisch so gelehrte Mathematiker wie der seitdem verstorbene G. Wertheim[1]) in Frankfurt a. M. und Herr Henri Bosmans[2]), S. J., in Brüssel die erste Ausgabe nach ihrer historischen und literarischen Seite einer genaueren Prüfung unterzogen haben. In allen Punkten habe ich freilich den Anregungen dieser und anderer Kritiker bei erneuter Prüfung der betreffenden Fragen nicht zu folgen vermocht. Die neue Ausgabe wird gleichfalls, wiewohl ich behaupten darf, bereits jetzt ein größeres Maß von Arbeit auf sie verwandt zu haben als auf die erste insgesamt, auch in historischer und literarischer Hinsicht gewiß zu wünschen übrig lassen.

Auch die Art der Darstellung ist für die neue Ausgabe im wesentlichen dieselbe geblieben wie für die alte, und ich darf daher aus dem Vorwort der ersten Ausgabe wiederholen, daß ich eine Darstellungsform anstrebte, bei der das Buch einerseits auch für den gebildeten Laien nicht unlesbar sein, andererseits aber doch die wichtigsten wissenschaftlichen Gesichtspunkte, wie Beziehungen zu rein mathematischen Fragen, wenn auch kurz, so doch klar hervortreten möchten. Bei dem elementaren Charakter der meisten Probleme ist eine solche Aufgabe gewiß nicht unmöglich, und jedenfalls erfordert das Verständnis des Buches nur ganz geringe positive mathematische Kenntnisse, wenn auch eine gewisse Übung im mathematischen Denken überhaupt eine unerläßliche Vor-

1) Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterr. 32, 1901, S. 374—376.
2) Revue des Questions scientifiques, juillet 1901 (9 p.).

bedingung sein dürfte. Die neue Ausgabe trägt dem Standpunkt des unmathematischen Lesers sogar noch in höherem Maße Rechnung als die alte; wie diese sucht auch sie ihm im übrigen die Lektüre dadurch zu erleichtern, daß solche Partien, die in erster Linie an die Adresse des Fachmanns gerichtet sind und die daher zu überschlagen für den Laien zunächst geraten sein dürfte, durch kleineren Druck ausgezeichnet wurden.

Magdeburg, den 11. November 1909.

W. Ahrens.

Vorwort zur dritten Auflage.

Da Bd. II der zweiten Auflage erst acht Jahre nach Bd. I erschienen war, so ist dieser vor jenem vergriffen. An eine völlig neubearbeitete dritte Auflage von Bd. I konnten Verlag und Verfasser unter diesen Umständen und bei den heutigen Herstellungspreisen begreiflicherweise nicht denken und eine solche war auch um so entbehrlicher, als Bd. II erst vor wenigen Jahren umfangreiche „Nachträge und Berichtigungen zu Bd. I“ gebracht hatte und viel weiteres Material auch bis heute nicht vorliegt. So mußte denn für die Neuherstellung von Bd. I das anastatische Verfahren als das zweckmäßigste erachtet werden, wobei nur kleinere, notwendige Verbesserungen Berücksichtigung finden konnten. Auch eine Hineinverarbeitung der soeben schon genannten „Nachträge und Berichtigungen“ von Bd. II (S. 315—360) war mithin im allgemeinen nicht angängig, vielmehr sei der Leser auf diese Nachträge auch für Benutzung dieser neuen Ausgabe ausdrücklich hingewiesen. Ebenso mußten auch die am Ende dieses Bandes (S. 399/400) schon seinerzeit gegebenen „Zusätze“ in der Hauptsache abermals dort reproduziert werden; auch sie wolle man daher bei dem Gebrauch dieses Buches beachten.

Rostock, den 11. Juli 1921.

W. Ahrens.

VI

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Kapitel I. Erschwerte Überfahrten 1
§ 1. Wolf, Ziege, Kohlkopf 1
§ 2. Die drei Ehepaare 4
§ 3. Überfahrten mit größerem Boot 9
§ 4. Eine Insel im Fluß 10
§ 5. 3 Herren und 3 Sklaven 11
Kapitel II. Ein Problem Taits 14
Kapitel III. Numerationssysteme 24
§ 1. Verschiedene Zahlensysteme 24
§ 2. Das dyadische oder binäre System 35
§ 3. Verschiedene dyadische Spiele und Aufgaben 38
I. Das Erraten einer gedachten Zahl 38
II. Ein Bild, das jemand sich gedacht hat, zu erraten . 39
III. Nochmals das Erraten einer gedachten Zahl 43
IV. Die Gitterschrift 48
V. Der „Turm von Hanoï“ 52
VI. Der Baguenaudier 61
VII. Nim 72
§ 4. Das Gewichtsproblem Leonardos von Pisa 88
§ 5. Gergonnes Haufenproblem 98
Kapitel IV. Umfüllungsaufgaben 105
§ 1. Literatur und Geschichte der Aufgabe; ihre älteste Form und deren Lösungen 105
§ 2. Allgemeine Methoden für die Zweiteilung 109
§ 3. Bedingungen der Lösbarkeit 116
§ 4. Teilung nach beliebigem Verhältnis 117
§ 5. Dreiteilung 124
Kapitel V. Parkettierungen 125
Kapitel VI. Einige kleinere Unterhaltungen 145
§ 1. Ein Bachetsches Spiel 145
§ 2. Mutus dedit nomen cocis 148
§ 3. Ein Kartenkunststück Monges 152
§ 4. Onkel und Neffe 156

Aus dem Vorwort der zweiten Auflage.

Das Buch, das sich nunmehr in zweiter Auflage seinen Freunden vorstellt, hat hinsichtlich des behandelten Stoffes denselben Rahmen behalten. Ausgeschlossen blieben, wie aus dem Vorwort der ersten Auflage wiederholt werden darf, auch jetzt alle solche, in verwandten Werken vielfach vertretenen Dinge, die entweder dem Fachmathematiker trivial erscheinen müssen oder wenigstens keinerlei wissenschaftliches Interesse zu erregen vermögen. Die vielfach geäußerten Wünsche nach Aufnahme bald dieser, bald jener, oft völlig andersartigen Materie konnten leider nicht berücksichtigt werden, da dies dem Buche einen ganz anderen Charakter gegeben und auch eine mehr oder weniger erhebliche, ja bei Berücksichtigung aller Desiderien eine maßlose Erweiterung des Umfanges bedingt hätte. Ist doch ohnehin bei Beibehaltung des alten Programms das Buch so stark angeschwollen, daß sein altes Kleid viel zu eng geworden war und die Umwandlung der einbändigen in eine zweibändige Ausgabe sich dringend empfahl. Nicht nur die Literatur der neuesten, auch manche bisher unberücksichtigte Schriften der älteren Zeit forderten Beachtung; dazu kamen aus Fachgelehrten- und Laienkreisen mancherlei Anregungen, Wünsche, größere und kleinere Beiträge. Allen diesen freundlichen Mitarbeitern, deren Namen an den betreffenden Stellen genannt sind, danke ich generell auch an dieser Stelle. Den geäußerten Wünschen habe ich mich bemüht, nach Möglichkeit Rechnung zu tragen, soweit sie in den Rahmen des alten Programms paßten, und manches, das vielleicht dem einen oder anderen Leser überflüssig

Seite

§ 4. $n = 9, 10, 11, 12$. Zusammenstellung aller bisherigen Resultate 299
§ 5. Betrachtungen allgemeinerer Art 302
§ 6. Das Problem für die übrigen Schachfiguren 311
Anhang. Lösungen des Hauptproblems für das gewöhnliche Schachbrett. Von K. v. Szily 313
Kapitel XI. Der Rösselsprung 319
§ 1. Aus der Geschichte des Rösselsprungs 319
§ 2. Definitionen und Vorbemerkungen 325
§ 3. Eine Aufgabe des Guarinus 327
§ 4. Eulersche Rösselsprünge 328
§ 5. Das Warnsdorfsche Verfahren 333
§ 6. Zur Morphologie des Rösselsprungs 341
§ 7. Rösselsprünge auf Brettern anderer Form 346
§ 8. Methoden von Volpicelli und Minding 352
§ 9. Methode Collinis 357
§ 10. Methode Vandermondes 365
§ 11. Die Quadrupelmethode 369
§ 12. Methode von Frost 374
§ 13. Magische Rösselsprünge 379
§ 14. Kubische Rösselsprünge 384
§ 15. Anzahlbestimmungen 386
§ 16. Das Problem des Brettablaufs für die übrigen Schachfiguren 392
Zusätze 399

Kapitel I.

Erschwerte Überfahrten.

Saepe notavimus, nusquam homines quam in ludicris ingeniosiores esse: atque ideo ludos Mathematicorum curam mereri, non per se, sed artis inveniendi causa.

LEIBNIZ.
„Annotatio de quibusdam Ludis" etc. Miscellanea Berolinensia 1710, p. 22.

§ 1. Wolf, Ziege, Kohlkopf.

Alcuin, der Freund Karls des Großen und sein und seines Hofes Lehrer, liebte es, im Unterricht das Interesse durch scherzhafte Rätsel zu beleben.[1]) Eine wahrscheinlich auf ihn[2]) zurück-

1) Vgl. M. Cantor, „Geschichte der Mathematik", Bd. I (3. Aufl., 1907), p. 833.

2) Beati Flacci Albini seu Alcuini Abbatis Opera, ed. Frobenius, Tomi secundi volumen secundum (Ratisbonae 1777), p. 440—448: „Propositiones ad acuendos iuvenes", p. 443: XVIII. Propositio. „De homine et capra et lupo". — Ob die Aufgabensammlung der „Propositiones ad acuendos iuvenes", die ohne Nennung eines besonderen Verfassers um das Jahr 1000 Verbreitung fand, in der Tat Alcuin zum Verfasser hat, steht mit Sicherheit freilich nicht fest; s. M. Cantor, „Die römischen Agrimensoren" (Leipzig 1875), p. 149, sowie „Geschichte der Mathematik", Bd. 1, 3. Aufl. (Leipzig 1907), p. 834—839. — In der Folge findet sich die Aufgabe dann außerordentlich häufig; von der älteren Literatur möge noch zitiert werden: Von dem etwa im Jahre 1265 gestorbenen Abte Albert, der überhaupt mehrere derartige Aufgaben aus den „Propos. ad acuendos iuvenes" geschöpft hat, herrührend, die Annales Stadenses, veröffentlicht in den „Monumenta Germaniae historica" (G. H. Pertz), Scriptorum t. XVI (Hannover 1859), p. 333 (vgl. dazu Herm. Hagen, „Antike und mittelalterliche Rätselpoesie", Biel 1869, p. 30/31 und p. 50, Anm. 22); ferner eine

gehende und noch heute häufig gestellte Aufgabe verlangt von einem Fährmann, einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über einen Fluß zu setzen, wenn der beschränkte Raum seines Bootes ihm nur gestattet, eins der drei zu gleicher Zeit mitzunehmen, er andererseits aber verhindern soll, daß in seiner Abwesenheit während einer der Überfahrten der Wolf die Ziege frißt oder die Ziege den Kohlkopf. — Zunächst muß der Fährmann natürlich die Ziege hinübernehmen und dann allein zurückfahren. Für die Fortsetzung ergeben sich dann 2 Möglichkeiten: Es kann darauf zunächst der Wolf hinübergenommen werden, dann muß aber, damit Wolf und Ziege am jenseitigen Ufer nicht allein bleiben, die letztere wieder mit zurückgenommen werden, alsdann der Kohlkopf hinübergebracht und dann nach nochmaliger Rückfahrt die Ziege geholt werden.

Wir schreiben diese Lösung nachstehend kurz schematisch und stellen zugleich die zweite, noch nicht angegebene Lösung, die sich von der ersteren nur in der Reihenfolge der einzelnen Operationen unterscheidet, daneben, wobei wir immer unter einer Nummer je eine Überfahrt und darauffolgende Rückfahrt vereinigen:

Lösung I	Lösung II
1) Ziege hinüber	1) Ziege hinüber
2) Wolf hinüber Ziege zurück	2) Kohlkopf hinüber Ziege zurück
3) Kohlkopf hinüber	3) Wolf hinüber
4) Ziege hinüber	4) Ziege hinüber.

Aufgabensammlung von 1484, die einer Handschrift von Chuquets gleichaltrigem „Triparty“ beigegeben ist und daher diesem gleichfalls zugeschrieben wird, herausgeg. von Aristide Marre, Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche 14, 1881, p. 459, Aufg. 163 (vgl. dazu M. Cantor, „Gesch. d. Mathem.“, Bd. 2, 2. Aufl. (Leipzig 1900), p. 359 u. 361/2); sodann Tartaglia, „General Trattato di numeri, et misure“, 1556, I, libro XVI, art. 141, fol. 257. In den „Propositiones“ (Alcuin) und den „Annales Stadenses“ findet sich die erste, bei Chuquet und Tartaglia die zweite unserer obigen Lösungen.

Eine andere Aufgabe[1]) dieser Art ist die folgende:

Eine Abteilung Soldaten kommt an einen Fluß, über den keine Brücke führt. Auf dem Fluß spielen 2 Knaben in einem Boot, welches jedoch so klein ist, daß es nicht mehr als einen Soldaten trägt. Wie läßt sich mittels des Boots und der Knaben die Überfahrt bewerkstelligen?

Die Lösung ergibt sich leicht in der Weise, daß immer in je 2 Hin- und Herfahrten ein Soldat übergesetzt wird, indem zunächst beide Knaben übersetzen und einer von ihnen am jenseitigen Ufer zurückbleibt, während der andere das Boot zurückbringt und es einem Soldaten zur Verfügung stellt, der nun damit übersetzt, um es dann durch den am jenseitigen Ufer zurückgebliebenen Knaben zurückbringen zu lassen. Dieser Vorgang wiederholt sich dann so oft, wie Soldaten vorhanden sind.

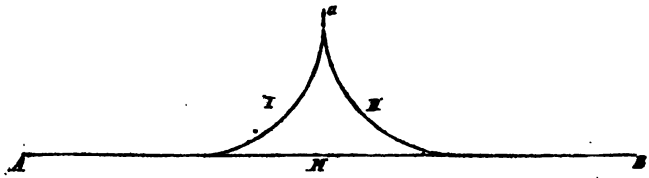


Fig. 1.

Wir stellen daneben eine andere (natürlich moderne) Aufgabe, die folgendes verlangt:

Auf einem Eisenbahngeleise AMB (s. Fig. 1) befindet sich eine Lokomotive, auf den seitlichen Kurvensträngen I und II bzw. die Wagen W_1 und W_2; die den beiden Kurven gemeinsame Spitze a ist lang genug, um einen der Wagen aufzunehmen, nicht aber reicht sie für die Lokomotive aus. Wie kann die Lokomotive den Wagen W_1 auf den Strang II und W_2 auf I bringen?

---

1) Auch diese findet sich bereits unter den „Aufgaben zur Verstandesschärfung", Alcuini Opera, l. c.: XVIIII. und ebenso XX. Propositio, gestellt für den einfachsten Fall von 2 „Soldaten" resp., wie es dort heißt: 1 Mann, 1 Frau und 2 Kinder.

Man findet leicht folgende Lösung: Die Lokomotive fährt zunächst in der Richtung nach B, dann zurück auf II, schiebt W_2 bis a, läßt W_2 dort stehen, fährt selbst über M in I ein und schiebt W_1 so weit zurück, daß er mit W_2 zusammengekoppelt werden kann. Dann zieht die Lokomotive beide Wagen von I fort nach M und läßt W_2 dort stehen, während W_1 wieder auf I bis nach a geschoben wird, wo er zurückgelassen wird. Hierauf spannt sich die Lokomotive vor den auf M zurückgebliebenen W_2 und schiebt ihn, wie verlangt, auf I, fährt dann allein über M nach II bis an den auf a befindlichen Wagen W_1, zieht diesen auf II herauf — und das Verlangte ist geleistet.[1])

§ 2. Die drei Ehepaare.

Eine den obigen verwandte Aufgabe, die sich gleichfalls bereits in den „Aufgaben zur Verstandesschärfung“[2]) findet, vermutlich aber noch älter ist[3]), erhebt, in ein wenig veränderter Fassung[4]) wiedergegeben, folgende Frage:

3 eifersüchtige Ehemänner befinden sich mit ihren Frauen am Übergang über einen Fluß und treffen dort ein kleines Boot ohne Fährmann, das nur 2 Personen faßt. Wie ist die Überfahrt zu bewerkstelligen, wenn sich dabei niemals eine Frau ohne ihren Mann in Gesellschaft eines anderen Mannes befinden soll?[5])

---

1) Andere Aufgaben dieser Art findet man in der einschlägigen Literatur vielfach, so z. B. bei Fourrey, „Récréat arithm.“, Paris 1899, p. 185.

2) Alcuini Opera, l. c.: XVII. Propositio.

3) Siehe die Anmerkung auf S. 6/7.

4) In dieser Form bereits in den Annales Stadenses, l. c. p. 334, und im Appendix zum „Triparty“, l. c. p. 459/60: Aufg. 164; ferner z. B. bei Tartaglia, l. c., art. 142, fol. 257 und in Bachets „Problèmes plaisants et délectables“, 2. Aufl., 1624, p. 212; 4. Aufl., 1879, p. 148.

5) Johann Jürgen Ressing („Arithmetische Ruhe-Stunden“, Hamburg 1738, p. 98) ist sogar in der Lage, den Ort der Begebenheit anzugeben: die 3 Ehe- oder vielmehr Brautpaare, deren männliche Teile

Stellen wir zunächst einmal die Aufgabe nur für den Fall zweier Paare, so sieht man, daß zunächst 2 Männer nicht übersetzen dürfen. Denn dann müßten entweder beide mit dem Boot zurückkehren, womit überhaupt nichts gewonnen wäre, oder aber der eine würde, um das Boot zurückzubringen, mit der Frau des anderen in dessen Abwesenheit zusammentreffen, was gegen die Vorschrift der Aufgabe verstößt. Es müssen also zunächst entweder 2 Frauen oder ein Ehepaar übersetzen. In jedem dieser beiden Fälle bleibt dann also eine Frau am jenseitigen Ufer zurück, während die andere resp. der Mann das Boot zurückbringt. Nach der ersten Hin- und Herfahrt befindet sich also eine Frau drüben. Nun könnten 2 Männer oder ein Paar übersetzen; letzteres ist aber unzulässig, weil dann der betreffende Mann am jenseitigen Ufer die andere Frau ohne deren Mann antreffen würde; es müssen also jetzt 2 Männer übersetzen. Es bleibt dann nur noch eine Frau zurück, die nun entweder durch ihren Mann oder durch die bereits übergesetzte Frau hinübergeholt wird. Wir wollen diese Lösung schematisch darstellen und zu dem Zweck, wie auch weiterhin stets, die Männer durch A, B und entsprechend die Frauen durch a, b bezeichnen und wollen je eine Hinfahrt und darauffolgende Rückfahrt unter einer Nummer zusammenfassen, so daß also 1^a den Zustand nach der ersten Hinfahrt, 1^b nach der ersten Rückfahrt angibt; wir bekommen so folgendes Schema für die Lösung:

	Jenseits	Diesseits
	—	A, a, B, b
1^a)	a, b; $[A, a]$	A, B; $[B, b]$
1^b)	a	A, B, b
2^a)	a, A, B	b
2^b)	A, B; $[A, a]$	a, b; $[B, b]$
3^a)	A, B, a, b	—

sehr befreundet waren, ohne daß die Freundschaft sich jedoch „biß in der Armour" erstreckte, wollten sich von Blankenese nach Buxtehude begeben und zu dem Zweck über die Elbe setzen.

Bei zwei Möglichkeiten ist die eine in Klammern daneben angegeben.

Wir fassen sodann den Fall der 3 Ehepaare ins Auge und geben in entsprechender schematischer Weise, wie folgt, die Lösung:

	Jenseits	Diesseits
	—	A, a, B, b, C, c
1^a)	a, b; $[A, a]$	A, B, C, c; $[B, b, C, c]$
1^b)	a	A, B, b, C, c
2^a)	a, b, c	A, B, C
2^b)	a, b	A, B, C, c
3^a)	a, b, A, B	C, c
3^b)	a, A	B, b, C, c
4^a)	a, A, B, C	b, c
4^b)	A, B, C	a, b, c
5^a)	A, B, C, a, b	c
5^b)	A, B, C, a; $[A, B, a, b]$	b, c; $[C, c]$
6^a)	A, B, C, a, b, c	—

Man erkennt leicht, daß es keine zweite Lösung gibt, abgesehen natürlich von denjenigen, welche aus der angegebenen durch Vertauschung unter sich gleichberechtigter Elemente, wie etwa zweier Ehepaare, entstehen.

Diese Lösung gibt auch folgender Merkvers an:

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit, redeunt bini; mulierque sororem
Advehit; ad propriam sive maritus abit.[1])

1) Der Ursprung dieser Verse ist mir nicht bekannt. In H. Meyers Ausgabe der „lateinischen Anthologie" findet sich folgender, wenn auch ähnlicher Merkvers:

Uxor abit duplex, redit una, meat quoque duplex.
Una redit, geminus vir abit, redit uxor et unus:
Vir geminus vehitur, redit una, duaeque vehuntur.
Vir redit et plena rate transmeat unus et una.

(„Anthologia veterum latinorum epigrammatum et poematum", ed.

Die Annales Stadenses geben diesen Merkvers:

Binae, sola, duae, mulier, duo, vir mulierque
Bini, sola, duae, solus, vir cum muliere.

Handelt es sich um 4 Ehepaare, so sieht man leicht, daß die beiden ersten Fahrten notwendig wieder in derselben Weise auszuführen sind. Für die dritte scheint sich zunächst auch folgende Eventualität zu bieten:

	Jenseits	Diesseits
3^a)	*a, b, c, d*	*A, B, C, D*
3^b)	*a, b, c*	*A, B, C, D, d,*

doch ist ein Fortschritt auf dieser Basis nicht möglich, da doch schließlich die Männer auch übergesetzt werden müssen, das Boot jedoch nur 2 gleichzeitig faßt, mithin etwa die Frau *c* am jenseitigen Ufer mit *A* und *B* ohne ihren Mann zusammentreffen würde.[1]) Die dritte Fahrt ist daher auch noch in derselben Weise zu bewerkstelligen wie oben. Am Ende derselben ist die Situation folgende:

Jenseits	Diesseits
a, A	*B, b, C, c, D, d.*

H. Meyer, Leipzig 1835, t. II, p. 61, Nr. 1062). Merkwürdigerweise enthält die betreffende Handschrift nur diese Lösung — ohne die Aufgabe selbst; zugleich wäre dies Vorkommnis, wenn die Verse wirklich einen berechtigten Platz in der Anthologie haben, deshalb merkwürdig, weil sie alsdann jedenfalls das früheste uns bekannte Vorkommnis unseres Problems in der Literatur darstellten. In neuerer Zeit ist jedoch das Alter dieser Verse aus guten Gründen in Zweifel gezogen und A. Riese setzt sie ungefähr in das zehnte Jahrhundert und läßt sie daher in seiner Ausgabe der „Anthologia latina" (Leipzig 1870) fort (s. Pars prior, Fasciculus II, Praefatio, p. XLII/XLIII).

1) Bei Tartaglia (l. c. art. 143) wird dies als mit den Bedingungen der Aufgabe vereinbar angesehen, indem die Frau *c* unmittelbar, nachdem die Männer *A* und *B* am jenseitigen Ufer gelandet sind, das Boot besteigt, um es zum diesseitigen Ufer zurückzuführen. Die Fortsetzung wäre alsdann am besten so zu bewirken, daß die Männer *C, D* übersetzen und darauf eine der übergesetzten Frauen *a, b* die übrigen (*c, d*) einzeln hinüberholt.

2 Männer setzen jetzt nicht über, da sie ihre Frauen in Gesellschaft eines Mannes zurücklassen müßten, ebensowenig 2 Frauen, da sie am jenseitigen Ufer mit einem fremden Manne zusammentreffen würden; also muß schon ein Ehepaar übersetzen. Nun darf aber das Boot weder durch einen Mann noch durch eine Frau zurückgerudert werden, vielmehr muß es entweder durch das eben angekommene Ehepaar oder aber durch die beiden Männer zurückgeführt werden; dann kommen wir aber zu den Stellungen nach der 3. resp. 2. Fahrt zurück. Wir sehen somit, daß für 4 Ehepaare und a fortiori natürlich für mehr als vier unsere Aufgabe unlösbar wird.

Die nach den 3 ersten Fahrten erreichte Stellung:

Jenseits	Diesseits
a, A	*B, b, C, c, D, d*

legt eine Modifikation der Aufgabe nahe[1]), durch welche deren Lösbarkeit wieder hergestellt wird. Denkt man sich nämlich im Fluß eine Insel, so kann man die Aufgabe offenbar so lösen, daß nach dem obigen Schema zunächst das Ehepaar *a, A* statt auf das andere Ufer auf die Insel gebracht wird. Das Boot befindet sich nach dieser dritten Fahrt wieder am diesseitigen Ufer und kann nun dazu dienen, die übrigen 3 Ehepaare in bekannter Weise auf das jenseitige Ufer — unbekümmert um die Insel und die auf ihr befindlichen Personen — zu befördern. Danach fährt eins der 3 Ehepaare nach der Insel zurück, von den beiden jetzt dort befindlichen Paaren bleiben die Frauen auf der Insel, während die Männer ans jenseitige Ufer fahren. Die auf der Insel zurückgebliebenen 2 Frauen werden dann nacheinander von einer der bereits übergesetzten Frauen abgeholt.

---

1) Dieselbe rührt her von Cadet de Fontenay (damals Gymnasiast); s. Lucas, „Récréations mathématiques", t. I, 2ième éd., 1891, p. 15.

§ 3. Überfahrten mit größerem Boot.

Die Überfahrt von 4 Ehepaaren ist auch ohne Insel noch dann möglich, wenn das Boot 3 statt 2 Personen faßt. Es ergibt sich leicht folgende Lösung:

	Jenseits	Diesseits
	—	*A, a, B, b, C, c, D, d*
1ª)	*a, b, c*	*A, B, C, D, d*
1ᵇ)	*a, b*	*A, B, C, c, D, d*
2ª)	*a, b, c, d*	*A, B, C, D*
2ᵇ)	*a, b, c*	*A, B, C, D, d*
3ª)	*a, b, c, A, B, C*	*D, d*
3ᵇ)	*a, b, A, B*	*C, c, D, d*
4ª)	*a, b, A, B, C, D*	*c, d*
4ᵇ)	*a, A, B, C, D*	*b, c, d*
5ª)	*a, b, c, d, A, B, C, D*	—

Auch bei 5 Ehepaaren ist unter dieser Annahme die Aufgabe noch lösbar; die Fahrten 1, 2, 3 sind in genau derselben Weise auszuführen, auf der vierten werden sodann statt der 2 Männer *C, D* die 3: *C, D, E* übergesetzt und dann die Frauen auf 2 Fahrten von einer der bereits übergesetzten hinübergeholt. Im ganzen erfordert die Lösung 6 Fahrten, wenn unter einer „Fahrt" immer eine Hin- und Rückfahrt verstanden und die letzte Überfahrt (Hinfahrt), wie auch weiterhin stets, als voll gerechnet werden soll. Für 6 Ehepaare ist aber auch bei einem 3 Personen fassenden Boot die Aufgabe nicht mehr lösbar, da bei der vierten Überfahrt ein Mann am diesseitigen Ufer zurückbleiben und damit jede Fortsetzung vereiteln würde.

Der Fall der 6 Paare wird dagegen lösbar, wenn das Boot 4 Personen faßt; unter dieser Bedingung ist auch der allgemeine Fall von n Paaren lösbar, da dann ja ein Paar sukzessive alle anderen übersetzen kann. Die Anzahl der Fahrten für diesen Fall ist natürlich $n - 1$.

Stellen wir mit Lucas[1]) diese Ergebnisse tabellarisch zusammen, so ergibt sich, wenn n die Anzahl der Paare, N die der erforderlichen Fahrten und p die Anzahl der Personen bedeutet, die das Boot faßt, folgendes:

$n = 2$	$p = 2$	$N = 3$
$n = 3$	$p = 2$	$N = 6$
$n = 4$	$p = 3$	$N = 5$
$n = 5$	$p = 3$	$N = 6$
$n > 5$	$p = 4$	$N = n - 1$.

§ 4. Eine Insel im Fluß.

Bei Annahme einer Insel im Fluß, einer Annahme, für die wir bereits oben (S. 8) die Überfahrt von 4 Paaren durchführten, wird allgemein die Überfahrt von n Paaren möglich, auch wenn das Boot nur 2 Personen faßt.

Zunächst können offenbar leicht 3 Frauen a, b, c in 2 Fahrten nach der Insel gelangen, eine der drei (c) kehrt mit dem Boot zurück, während die beiden anderen (a, b) auf der Insel bleiben. Diesen 2 Frauen folgen jetzt ihre Männer nach der Insel nach, die beiden Frauen fahren dann nach dem jenseitigen Ufer weiter, eine von ihnen (b) führt das Boot zur Insel zurück und bleibt dort, während die beiden Männer A und B nach dem jenseitigen Ufer übersetzen. A bleibt dort bei seiner Frau, während B zu seiner Frau nach der Insel zurückkehrt. Wir haben jetzt also folgende Situation:

Jenseits	Insel	Diesseits
A, a	B, b (Boot)	$C, c, D, d \ldots .$

Nun führt B das Boot zum diesseitigen Ufer zurück, und c, d fahren damit zur Insel; eine von beiden (d) führt das Boot zurück, damit die Männer B und C, deren Frauen auf der Insel sind, zum jenseitigen Ufer übersetzen können. Von hier

1) „Récr. mathém.“, t. I, p. 222.

führt die Frau a dann das Boot zur Insel, um b an das jenseitige Ufer zu bringen, während darauf C mit dem Boot zu seiner Frau nach der Insel führt. Wir haben also jetzt die Situation:

Jenseits	Insel	Diesseits
A, a, B, b	C, c (Boot)	$D, d \ldots .$

Vergleichen wir die beiden hier schematisch dargestellten Stellungen, so besteht der Fortschritt von der einen zur anderen darin, daß inzwischen ein weiteres Ehepaar übergesetzt ist, während sonst alles unverändert ist; man sieht sofort, daß durch eine Wiederholung derselben Operationen je ein weiteres Ehepaar übergesetzt werden kann, und wir kommen schließlich zu der Stellung, daß $n - 2$ Paare übergesetzt sind, eins dagegen sich noch am diesseitigen Ufer und eins auf der Insel befindet, also zu der Stellung

Jenseits	Insel	Diesseits
$A, a, B, b \ldots .$	Y, y (Boot)	$Z, z.$

Der Schluß ist dann so zu bewerkstelligen, daß Y mit dem Boot den Z abholt und beide nach dem jenseitigen Ufer fahren, während nun die Frau a die Frauen y und z einzeln von der Insel bzw. dem diesseitigen Ufer an das jenseitige führt.

§ 5. 3 Herren und 3 Sklaven.

Die im vorstehenden behandelte Aufgabe der 3 Ehepaare findet sich auch in der Form, daß statt der 3 Ehepaare 3 Herren mit ihren 3 Dienern gewählt sind, während sonst alles völlig entsprechend ist.[1]) Hieraus hat sich weiter folgende Aufgabe entwickelt:

1) So bei Leurechon in dem unter dem Namen seines Neffen und Schülers H. Van Etten veröffentlichten Werke „Recreation mathematique", 4ième éd., Paris 1627, p. 28/29, sowie bei dem hieran anschließenden Claude Mydorge, „Examen du livre des récréations mathématiques", Paris 1639, p. 42/43, Problème XIV; s. a. die holländische Ausgabe des Leurechonschen Werkes von Wynant van Westen (liter. Index), Ausg. 1663, p. 31.

„Über einen Fluß wollen sich 3 Herren und 3 Sklaven in einem Boot übersetzen, das keinen Fährmann hat und nur 2 Personen faßt. Da aber zu befürchten steht, daß die Sklaven jeden Moment, wo sie in größerer Anzahl als die Herren zusammen sind, benutzen, um ihre Herren zu erschlagen, so sollen weder am diesseitigen, noch am jenseitigen Ufer jemals mehr Sklaven als Herren sein.“

Man erkennt leicht, daß diese Aufgabe von der der 3 Ehepaare nicht wesentlich verschieden ist; denn auch dort läßt die einschränkende Bedingung sich so formulieren, daß die Frauen den Männern gegenüber nie in der Mehrzahl sein dürfen, ein Fall, der eben involvieren würde, daß sich mindestens eine Frau ohne ihren Mann in der Gesellschaft eines anderen befinden würde. Freilich erschienen bei jener Aufgabe nicht, wie jetzt, die verschiedenen Personen derselben Kategorie gleichwertig, sondern es bestand eine Zugehörigkeit zwischen je einem Mann und seiner Frau, worin jedoch nur eine scheinbare Erschwerung der Aufgabe liegt.

Die Lösung ergibt sich daher auch ganz entsprechend der des früheren Problems, wie folgt: Zunächst setzt ein Sklave in 2 Fahrten die beiden anderen über und führt das Boot zurück, 2 Herren setzen sodann über, und ein Herr und ein Sklave kehren wieder zurück, so daß sich jetzt am diesseitigen Ufer nur noch 2 Herren und 2 Sklaven befinden. Jetzt fahren die beiden Herren hinüber, während der bereits übergesetzte Sklave das Boot zurückführt, um in seinen weiteren Fahrten die anderen beiden Sklaven hinüberzuholen.

Die Aufgabe kann noch weiter durch die Bedingung erschwert werden, daß einige Personen nicht rudern können, jedoch muß, wie leicht ersichtlich, von den Herren, wie von den Sklaven wenigstens je einer rudern, damit die Aufgabe gelöst werden kann. Falls von den Herren nur einer rudert, dagegen alle Sklaven, so bleibt die obige Lösung bestehen, nur muß natürlich der rudernde Herr derjenige sein, der auf der dritten Fahrt hin- und zurückfährt. Wenn dagegen nur einer der Sklaven rudert, so erschwert dies die Lösung,

die sich nunmehr folgendermaßen gestaltet: Der rudernde Sklave setzt in 2 Fahrten die beiden anderen über und bringt das Boot zurück, dann fahren 2 Herren hinüber, und einer derselben kehrt mit einem Sklaven zurück. Damit nun später das Boot durch einen Sklaven zurückbefördert werden kann, setzt jetzt ein Herr mit dem rudernden Sklaven über und kehrt statt dessen mit dem anderen, vorher übergesetzten Sklaven zurück. Die weitere Fortsetzung ist dann, wie zuvor, indem die beiden Herren übersetzen und dann der bereits übergesetzte rudernde Sklave zurückkehrt, um die beiden anderen Sklaven nacheinander zu holen.

Diese Lösung bleibt auch noch bestehen, wenn außer einem rudernden Sklaven auch von den Herren nur einer rudert, nur muß natürlich gerade der rudernde Herr zu den verschiedenen Fahrten ausgewählt werden.

Sind die Sklaven alle des Ruderns unkundig, so ist die Aufgabe unlösbar, wenn wir nicht wieder zu der rettenden Annahme einer Insel im Fluß unsere Zuflucht nehmen. In diesem Falle ergibt sich leicht die Lösung, daß ein Herr sukzessive je einen Sklaven nach der Insel und dem jenseitigen Ufer rudert, sodann in 2 Fahrten die beiden anderen Herren übersetzt und darauf in 2 weiteren Fahrten die beiden am diesseitigen Ufer resp. auf der Insel gebliebenen Sklaven einzeln holt.

Kapitel II.

Ein Problem Taits.

Les jeux d'esprit sont de toutes les saisons et de tous les âges; ils instruisent les Jeunes, ils divertissent les Vieux, ils conviennent aux Riches, et ne sont pas au-dessus de la portée des Pauvres; les deux Sexes s'en peuvent accommoder sans choquer la bienséance.

OZANAM.
„Récréations math. et phys.", Préface.

§ 1.

Der bekannte englische Physiker Tait erzählt[1]), daß er einmal im Eisenbahnzuge folgende Aufgabe gelesen habe: 4 Sovereign und 4 Shilling folgen „in bunter Reihe" aufeinander; sie sollen in 4 „Zügen" so umgelegt werden, daß die 4 Sovereign zusammenliegen und ebenso die 4 Shilling, wenn in einem „Zuge" immer nur zwei aufeinanderfolgende Stücke zusammen — und zwar ohne Änderung ihrer relativen Lage — umgelegt werden dürfen.

Bezeichnet man die Sovereign durch B und die Shilling durch A, so ergibt sich leicht folgende Lösung:

	$. . A B A B A B A B$
1)	$B A A B A B A . . B$
2)	$B A A B . . A A B B$
3)	$B . . B A A A A B B$
4)	$B B B B A A A A . .$

Verändern wir die Spielregel jedoch dahin, daß mit jedem Zuge zugleich eine Vertauschung der beiden versetzten Münzen

1) Tait, „Listing's Topologie", Philosophical Magazine (5) 17, 1884, I, p. 39—40 = Scientific Papers 2 (1900), p. 98.

unter sich verbunden ist,[1]) so müssen wir auf die Forderung einer Lösung in 4 Zügen verzichten; in 5 Zügen erhalten wir dagegen leicht folgende Lösung:

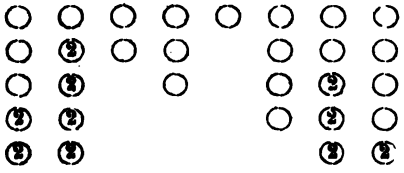
. . *A B A B A B A B*
1) *A B A B A B A . . B*
2) *A B A . . B A A B B*
3) *A . . A B B A A B B*
4) *A A A A B B . . B B*
5) *A A A A B B B B . .*

Bevor wir in der Behandlung dieser Aufgabe fortfahren, besprechen wir zunächst einige hiermit verwandte Aufgaben (§§ 2, 3); § 4 wird uns dann zu dem Taitschen Problem zurückführen und eine Lösung für eine verallgemeinerte Form desselben, jedoch bei Beobachtung der ursprünglichen Spielregel liefern; das Entsprechende bei Anwendung der modifizierten Spielregel (mit Vertauschung der versetzten Münzen) leistet sodann § 5.

§ 2.

Acht Münzen liegen in einer geraden Linie; wie kann man dadurch, daß man eine Münze immer über je zwei — nach links oder rechts — springen läßt und sie auf die dritte legt, erreichen, daß alle Münzen zu Paaren angeordnet werden?[2])

Bezeichnen wir die Münzen durch kleine Kreise und deuten wir, wenn mehrere übereinander liegen, die Anzahl durch eine in den Kreis geschriebene Ziffer an, so ergibt sich die Lösung leicht folgendermaßen:



1) Siehe Tait, l. c. p. 40.
2) Lucas, „Récréations", t. 2, 6dit. II, p. 139.

Man erkennt leicht, daß für weniger als 8 Münzen die Aufgabe nicht lösbar ist, dagegen für jede größere geradzahlige Anzahl. Braucht man doch nur die vierte Münze auf die erste, dann die sechste auf die zweite usw. zu legen, bis nur noch acht einzelne im Innern übrig bleiben, und auf diese die obige Lösungsmethode anzuwenden.

H. Delannoy hat diese Aufgabe folgendermaßen verallgemeinert[1]):

$m \cdot n$ Münzen liegen in einer Geraden; man soll aus ihnen m Haufen von je n formen dadurch, daß man immer eine Münze über n andere — nach rechts oder links — springen läßt und sie auf die $(n+1)$te legt.

Dabei muß aber, soll die Aufgabe lösbar sein, $m \geqq 4$ sein, wie wir ja auch in dem von uns bereits betrachteten Spezialfall $n = 2$ gesehen haben. Die Lösung ergibt sich nach dem Obigen von selbst. Nehmen wir z. B. $n = 5$, $m = 4$ an, also

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○,

so springt zunächst 8 auf 2, dann 9 auf 2, dann 10 auf 2 und darauf der Reihe nach 13, 12, 11 auf 19; wir haben dann folgendes Bild:

1 2 3 4 5 6 7 14 15 16 17 18 19 20

○ ④ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ④ ○

Jetzt springt 7 auf 19 und 15 auf 2 und dann sukzessive 3, 4, 5, 6 über Haufen 2 auf 1 und 18, 17, 16, 14 über Haufen 19 auf 20.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß sich diese Methode bei $m = 4$ und beliebigem n stets anwenden läßt.[2]) Ist aber

---

1) Siehe Lucas, „Récréations", t. 2, p. 140.

2) Für $n > 5$ ergibt sich die Lösung ganz analog der obigen. Ist aber $n = 4$, so braucht man nur einfach in dem obigen Schema nebst Lösung die Münzen 3, 10, 11, 18 und die darauf bezüglichen Operationen auszulassen. Ist $n = 3$, so erhält man aus der vorigen eine Lösung, indem man weiter noch die Münzen 4, 9, 12, 17 ausläßt. Für $n = 2$ war bereits zuvor eine Lösung angegeben.

$m > 4$, so kann man, wie bereits oben bei dem Fall $n = 2$ angegeben, an dem einen Ende $m - 4$ Haufen zu je n Münzen formieren, so daß noch $4n$ einzelne Münzen in einer ununterbrochenen Folge übrig bleiben und die Aufgabe sich also auf diesen eben erledigten Fall $(4 \cdot n)$ reduziert. Da jede Münze hierbei höchstens einmal gezogen wird, andererseits aber auch nur die unterste Münze in jedem der m Haufen ungerührt bleibt, so beträgt die Anzahl der Züge $m \cdot n - m$.

§ 3.

Auf 5 in einer geraden Linie befindlichen Feldern seien auf 1 und 2 weiße und auf 4 und 5 schwarze Steine, während 3 leer sein soll. Wie ist es einzurichten, daß die weißen Steine die Plätze der schwarzen und umgekehrt einnehmen, wenn jeder Stein nach rechts oder links auf das benachbarte leere Feld vorrücken, wie auch über einen benachbarten Stein hinweg auf das leere Feld springen darf?[1])

Es ergibt sich leicht folgende Lösung mit einer symmetrischen Stellung in der Mitte und zwei zueinander reziproken Hälften zu beiden Seiten derselben:

1	2	3	4	5
○	○	•	●	●
○	•	○	●	●
○	●	○	•	●
○	●	○	●	•
○	●	•	●	○
•	●	○	●	○
●	•	○	●	○
●	●	○	•	○
●	●	•	○	○

Diese Lösung bildet nur den einfachsten Fall der von van den Berg für das allgemeine Problem — je n weiße und schwarze Steine — angegebenen[2]); diese lautet, wenn

1) Lucas, „Récréat.“, t. 2, p. 141 oder „L'arithmétique amusante“, 1895, p. 117.

2) Lucas, „Arithm. amus.“, p. 124.

wir mit V das Vorrücken auf das benachbarte leere Feld und mit S einen Sprung bezeichnen und immer in eine Reihe die Operationen der Steine derselben Farbe schreiben, folgendermaßen:

$$
\begin{array}{c}
1\,V \\
1\,S,\ 1\,V \\
2\,S,\ 1\,V \\
3\,S,\ 1\,V \\
\vdots \\
(n-1)\,S,\ 1\,V \\
n\,S \\
1\,V,\ (n-1)\,S \\
1\,V,\ (n-2)\,S \\
\vdots \\
1\,V,\ 3\,S \\
1\,V,\ 2\,S \\
1\,V,\ 1\,S \\
1\,V.
\end{array}
$$

Die erste Reihe gibt also etwa die Operationen der weißen Steine an, dann die zweite die der schwarzen, die dritte die der weißen usw. Von der Richtigkeit dieser Lösung überzeugt der Leser sich leicht. Man beachte dabei insbesondere das Gesetz, nach dem das leere Feld wandert: Es vollführt, ursprünglich in der Gleichgewichtslage, gewissermaßen Oszillationen von wachsender Schwingungsweite, bis die Schwingungsweite die größtmögliche geworden ist, d. h. das leere Feld an den Rand und zwar erst auf der einen, dann auf der anderen Seite, gerückt ist. Nun nimmt die Schwingungsweite in derselben Weise ab, wie sie vorher zunahm, bis zur Rückkehr in die Gleichgewichtslage. — Die Gesamtzahl der Züge — jedes einzelne V, sowie S besonders gerechnet — ist $n(n+2)$.

Eine Abart unserer Aufgabe ist die folgende:

Unter Beibehaltung derselben Spielregel sollen auf nebenstehendem Brett weiße und schwarze Steine die Plätze wechseln.[1])

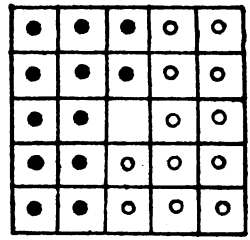


Fig. 1.

Zunächst vollzieht man den Platzwechsel zwischen den beiden Farben in der mittleren Horizontalen in der oben angegebenen Weise; dann schickt man sich an, dasselbe für die mittlere Vertikale zu machen, hält aber nach jedem Zuge inne, um die Vertauschung erst in derjenigen Horizontalen vorzunehmen, in der sich gerade das leere Feld befindet. Da alle Felder der mittleren Vertikalen einmal leer werden, so läßt sich die Vertauschung überall ausführen.

§ 4.

Wir kehren nunmehr wieder zu dem **Taitschen Problem** zurück und denken uns bei unveränderter Spielregel dasselbe dahin verallgemeinert, daß n Paare von Münzen, also n Sovereign und n Shilling oder, wie wir jetzt der übersichtlicheren Darstellung halber sagen wollen: n weiße und n schwarze Steine vorliegen.

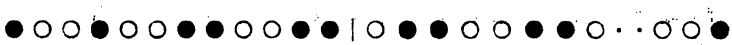
Nach Methoden von H. Delannoy[2]) ergibt sich die Lösung in folgender Weise:

I. n ist gerade. Der erste Zug besteht dann stets darin, die zweit- und drittletzte Münze nach vorn zu legen; wir gehen daher bereits von der hiernach erhaltenen Stellung aus und bekommen so z. B. für $n = 12$

1) Lucas, „Récréat.“, t. 2, p. 144.

2) Siehe Lucas in La Nature, XV, 1887, 2ième semestre, p. 10/11, sowie Lucas, „L'arithmétique amusante“, p. 93—97.

Dabei soll durch die darüber geschriebenen Ziffern hier, wie auch weiterhin stets, angedeutet werden, welche Paare der Reihe nach in den nächsten $\frac{n}{2} - 1$ Zügen in die leeren Plätze einzurücken haben. Ein Bild von der hierdurch erreichten Stellung erhalten wir am besten, wenn wir bedenken, daß die Plätze von 5 leer und die in dem Schema leeren durch 1 ausgefüllt werden, daß ferner das Paar 5 an die Stelle von 4 rückt oder, was für den schließlichen Effekt dasselbe ist, daß die beiden Münzen von 4 ihre Plätze vertauschen, ebenso die von 3, 2 und 1, da hier, wie auch weiterhin stets, die versetzten Paare abwechselnd aus weiß-schwarz und schwarz-weiß bestehen. Wir erhalten somit folgende Stellung:



Man sieht, daß nunmehr in der linken Hälfte die weißen Steine nur noch zu je 2 benachbarten vorkommen und dasselbe für die schwarzen in der rechten Hälfte gilt. Die erwünschte Stellung ergibt sich also leicht, indem wir abwechselnd ein weißes Paar von links in die leeren Plätze nach rechts und ein schwarzes von rechts nach links rücken, wobei nur so zu disponieren ist, daß das am rechten Ende stehende schwarze Paar zuletzt umgesetzt wird. Diese letzten $\frac{n}{2}$ Züge würden also etwa in folgender Reihenfolge auszuführen sein:

Auf eine solche Stellung, wie die eben beschriebene und vorstehend (zweimal) abgebildete, werden wir stets nach den ersten $\frac{n}{2}$ Zügen kommen, und die letzten $\frac{n}{2}$ Züge ergeben sich daher ohne alle Schwierigkeit, so daß wir uns in den jetzt zu gebenden Schemas auf Angabe der ersten $\frac{n}{2}$ Züge, von denen der erste bereits ausgeführt ist, beschränken:

a) $n = 4$:

(vgl. die Lösung in § 1)

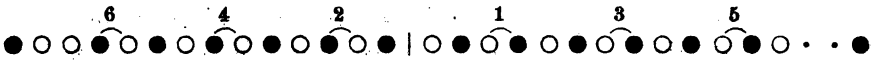
b) $n = 6$:

c) $n = 8$:

d) $n = 10$:

e) $n = 12$:

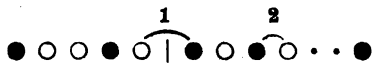
f) $n = 14$:



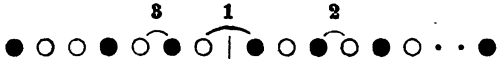
Man erkennt leicht, wie diese Reihe fortzusetzen ist.

II. n ist ungerade. Die erste Operation ist dann auch wieder für alle Fälle dieselbe, die wir oben bei geradem n hatten. In den nachfolgenden Schemas ist diese Operation daher wieder bereits ausgeführt, und die folgenden $\frac{n-1}{2}$ sind, wie oben, angedeutet. Nach Ausführung derselben kommt man wieder stets auf Stellungen, bei denen nur noch Paare von gleichartigen (weißen resp. schwarzen) Steinen zu versetzen sind; wir lassen daher auch hier wieder diese letzten $\frac{n-1}{2}$ Züge, die sehr leicht ausführbar sind, fort und geben im folgenden die Schemas:

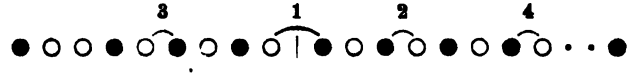
a) $n = 5$:



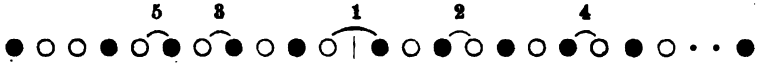
b) $n = 7$:



c) $n = 9$:



d) $n = 11$:



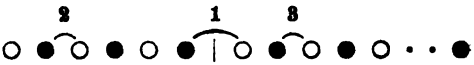
§ 5.

Legen wir jetzt die modifizierte Spielregel zugrunde, die bei jedem Zug zugleich eine Vertauschung der beiden versetzten Steine vorschreibt, so ergibt sich für den allgemeinen Fall von $2n$ Steinen eine Lösung jetzt nur in $n + 1$ Zügen[1]), wie wir dies bezüglich des Spezialfalls $n = 4$ bereits in § 1 gesehen hatten. Wir geben die Lösungen nachstehend in unserer schematischen Schreibweise, wobei der erste Zug wieder, wie zuvor, in einer Versetzung des zweit- und drittletzten Steines nach vorn, jetzt nur mit gleichzeitiger gegenseitiger Vertauschung, besteht und in unseren Schemas bereits überall ausgeführt ist.

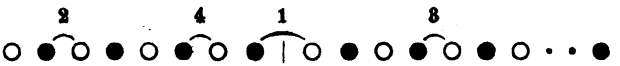
I. n gerade.

a) $n = 4$:

b) $n = 6$:



c) $n = 8$:

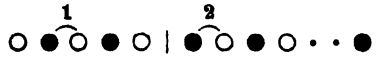


d) $n = 10$:

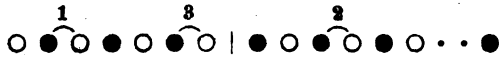
1) Siehe Lucas, „L'arithmétique amusante", p. 106—108.

II. n ungerade.

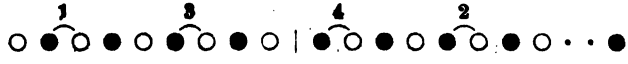
a) $n = 5$:



b) $n = 7$:



c) $n = 9$:



d) $n = 11$:

Da die in diesen Schemas versetzten Paare ausnahmslos aus einem schwarzen mit nachfolgendem weißen Stein bestehen, so erhält man die durch Ausführung der angedeuteten Züge resultierende Stellung offenbar, indem man in die jetzt leeren Plätze weiß-schwarz setzt, in allen numerierten Paaren schwarz mit weiß vertauscht und nur die Plätze des letzten Paares leer läßt. Man sieht dann leicht, daß in den so erhaltenen Stellungen in der linken Hälfte die schwarzen Steine immer nur zu je zwei und in der rechten die weißen immer nur zu je zwei vorkommen, so daß wir in dieser Beziehung im Vergleich mit den entsprechenden Positionen des § 4 eine Vertauschung der beiden Farben zu konstatieren haben, wie dies bei der Veränderung der Spielregel zu erwarten stand. Man erhält aus diesen Stellungen dann durch weitere $\frac{n}{2}$ resp. $\frac{n+1}{2}$ Züge leicht die verlangten Schlußstellungen, indem man abwechselnd ein weißes Paar von rechts nach links und ein schwarzes von links nach rechts setzt und zum Schluß das am Ende stehende schwarze Paar aufrücken läßt.

Kapitel III.

Numerationssysteme.

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

KRONECKER.

Siehe den Nekrolog von H. Weber, Math. Ann., Bd. 43, 1893, p. 15.

§ 1. Verschiedene Zahlensysteme.

„Der Mensch ist das Maß aller Dinge", sagt ein geflügeltes Philosophenwort.[1]) In der Tat, was war natürlicher, als daß der Mensch die Bestimmung von quantitativen Verhältnissen irgendwelcher Art, die doch stets auf eine Vergleichung hinauskommen muß, zunächst dadurch auszuführen suchte, daß er diesen Vergleich mit bezug auf sich selbst anstellte. So maß er Längen und Entfernungen nach seinem Fuß, seiner Elle, der Klafter seines Armes, seinen Schritten, so gaben ihm auch seine Hände mit ihren 10 Fingern die einfachste und natürlichste Rechenmaschine ab. Fast stets beschränkten sich die Funktionen dieser Rechenmaschine allerdings auf bloße Abzählungen, doch kommen auch andere Anwendungen vor. So dienen noch heute in Syrien und Palästina die 10 Finger dazu, bei Voraussetzung der Kenntnis des Einmaleins bis 5×5, dasselbe bis zu 10×10 zu liefern und zwar in folgender Weise: Handelt es sich etwa um die Multiplikation 7×9, so krümmt man, da $7 = 5 + 2$ und $9 = 5 + 4$ ist, von der einen

1) Protagoras in Plato, Theätet 152 *A*. — Allerdings ist das Wort des griechischen Sophisten dort in etwas anderem Sinne gemeint, insofern als damit die Negation aller objektiven Wahrheit ausgesprochen werden soll.

Hand 2 Finger und von der anderen 4, während die übrigen Finger ausgestreckt bleiben; man zählt dann die gekrümmten Finger, hier 6, und nimmt diese Zahl zum Zehner (60), multipliziert die Anzahlen der noch ausgestreckten Finger der beiden Hände, also hier $3 \times 1 = 3$, und addiert diese Zahl als Einer zu dem obigen Zehner, so daß man 63 erhält. Man befolgt also ein Verfahren, das sich in der Formel $(5 + a)(5 + b) = 10(a + b) + (5 - a)(5 - b)$ ausdrückt. Ist nur die eine Zahl größer als 5, so zerlegt man die Aufgabe, z. B. $4 \cdot 7 = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2$. — Die Bengalen sollen nicht nach den einzelnen Fingern, vielmehr an jedem der (4) Finger außer am Daumen, entsprechend dem End- und den 3 Gelenkpunkten des Fingers, bis 4, also im ganzen an jeder Hand bis 16, zählen.[1])

Die Benutzung dieser natürlichsten Rechenmaschine hat fast bei allen Völkern zu dem Dezimalsystem geführt.[2]) Wurden die Abzählungen zunächst — auf niedrigster Kulturstufe — nur an einer Hand vorgenommen, so war der Anlaß zu einem Quinarsystem ($6 = 5 + 1$; $7 = 5 + 2$ usw.) gegeben, das allerdings in strenger Durchbildung sich nirgends entwickelt hat, vielmehr sich naturgemäß doch stets im wesentlichen zu einem dezimalen auswuchs. Wurden andererseits neben beiden Händen auch die unteren Extremitäten mit zu Hilfe genommen, so entstand, wie bei den Azteken Mexikos, ein Vigesimalsystem.[3]) So wenig sich diese Zählmethode auch für den ge-

1) Lucas, „Récr. math.", t. III, p. 21.

2) Diesen Ursprung des dekadischen Zahlensystems hat zuerst Aristoteles hervorgehoben (Problemata, Sectio XV. 3. Opera, Ausgabe der Berliner Akademie, Bd. II, Berlin 1831, p. 910/911 = Ausg. Didot, Bd. IV der Opera Aristotelis, Paris 1889, p. 193/194). —

Hic numerus [10] magno tunc in honore fuit;
Seu quia tot digiti, per quos numerare solemus,
Seu ...

heißt es bei Ovid, Fast. III, 122 ff. Man vgl. auch A. v. Humboldt, „Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen" usw., Crelles Journal IV, 1829, p. 205—231.

3) Näheres über diese Verhältnisse siehe bei A. F. Pott, „Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Weltteile", Halle

stiefelten Kulturmenschen schickt, so besitzen doch auch die modernen Kultursprachen noch Überreste eines mehr oder weniger ausgebildeten Zwanzigersystems. Zu nennen ist vor allem das französische soixante-dix, quatre-vingts und quatre-vingt dix statt der wenigstens für den Schriftgebrauch abgeschafften[1]) oder doch nur noch in bestimmten Wendungen, wie z. B. „la version des septante" (Bibelübersetzung der Septuaginta), erhaltenen, sonst aber, besonders in Belgien, familiär viel gebrauchten und auch aus pädagogischen Gründen für den Anfangsunterricht im Rechnen wohl empfehlenswerten[2]) Formen septante, octante und nonante. Auch six vingts (120), sept vingts (140) und huit vingts (160) waren gebräuchlich[3]) und ein in Paris ursprünglich für 300 Blinde gegründetes altes Asyl heißt heute noch „L'hôpital des Quinze-Vingts" resp. nur „Les Quinze-Vingts", wie man auch den Insassen des Hospitals kurz „un Quinze-Vingt" nennt.[4]) Merkwürdig sind auch die im Dänischen, dagegen nicht im Norwegischen und Schwedischen vorkommenden vigesimalen Elemente: halvtresindstyve (dritthalbmalzwanzig = 50), tresindstyve (60), halvfirsindstyve (70), firsindstyve (80), vor allem auch halvfemsindstyve (90), während 100 hundrede ist.[5])

1847. Vgl. auch von demselben „Die Sprachverschiedenheit in Europa, an den Zahlwörtern nachgewiesen", Halle 1868.

1) In der älteren Literatur finden sich die dezimalen Formen (septante usw.) jedenfalls; als Beispiel sei genannt Pierre Forcadels „L'arithmetique" (Ausgabe von 1573, p. 11). — Über den Ursprung der vigesimalen Formen gehen die Meinungen auseinander; Paul Tannery (Intermédiaire des mathém. 10, 1903, p. 29/30) nimmt als die Stelle des Eindringens dieser vigesimalen Elemente in das Französische überhaupt nicht die Volkssprache, sondern die Schriftsprache an. Siehe im übrigen Cantor, „Geschichte der Math." I (3. Aufl., 1907), p. 9 und Hermann Hankel, „Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter", Lpz. 1874, p. 20.

2) C. A. Laisant, „Initiation mathématique", 2ième éd., 1907, p. 6/7.

3) Siehe Belegstellen in dem bekannten „Dictionnaire de la langue française" von É. Littré, t. II, 2e partie, Paris 1869, p. 2497.

4) Siehe Littré, l. c. p. 1430.

5) Über einen etwaigen Zusammenhang der französischen vigesimalen Zahlenausdrücke mit diesen dänischen s. Tannery (l. c.).

Von anderen Zahlensystemen ist besonders merkwürdig das freilich vielbestrittene undezimale System der Neu-Seeländer, die besondere Wörter für 11, $11^2 = 121$ und $11^3 = 1331$ haben sollen.[1]) Angaben über andere Zahlensysteme, ein Vierer- und ein eventuell damit zusammenhängendes Sechzehnersystem, ein Siebener-, ferner ein Achtzehnersystem[2]), auch über Sechser-[3]) und Zwölfersysteme[2])[3]), sind bestritten. Von dem neben einem Dezimalsystem bestehenden Sexagesimalsystem der Babylonier wird noch zu sprechen sein. Leibniz glaubte bei den Chinesen ein System mit der Grundzahl 2 entdeckt zu haben[4]), jedoch

1) Cantor, „Gesch. der Math.", Bd. I (3. Aufl.), p. 10. Ohne die große Autorität Cantors würde ich dieses bei einem unzivilisierten Volksstamme in solcher Ausbildung schon an sich recht unwahrscheinliche und von anderen Autoren (z. B. Hankel, l. c. p. 19, dem sich P. Tannery, l. c., anschließt) in Zweifel gezogene Zahlensystem hier überhaupt nicht nennen; denn auch Pott, den Cantor zitiert, scheint (s. die oben zitierte Schrift von 1847, p. 75) seiner Sache nicht ganz sicher zu sein und möglicherweise geht alles auf eine Angabe, die von Lesson, zurück.

2) Siehe M. Cantor, „Mathem. Beiträge zum Culturleben der Völker", Halle 1863, p. 44.

3) Siehe Cantor, „Geschichte der Math.", I, 3. Aufl., p. 10.

4) Dieses angebliche Zweier-System der Chinesen und überhaupt die Dyadik interessierte Leibniz in hohem Grade und bildet daher den Gegenstand einer ganzen Reihe von Abhandlungen und Briefen von ihm: „Explication de l'Arithmétique binaire" usw., Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris 1703 = Leibnitii Opera omnia, ed. Dutens, t. III, Genevae 1768, p. 390—394 = Mathem. Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt, Abt. II, Bd. III (= Ges. Werke, herausg. von G. H. Pertz, 3. Folge, Bd. VII), Halle 1863, p. 223—227 und „De Dyadicis", Mathem. Schriften, ibid. p. 228—234, s. a. die an letzterem Orte nun folgende Abhandlung; sodann — schon aus dem Jahre 1698 — zwei Briefe an Joh. Christ. Schulenburg: „De Arithmetica Dyadica", Opera omnia, l. c. p. 349—354 = Mathem. Schriften, l. c. p. 238—243; s. auch Leibniz' Briefwechsel mit Jac. Bernoulli, insbesondere Leibniz' Brief vom 28. Nov. 1704, sowie den auf Bernoullis Antwort vom 28. Febr. 1705 folgenden Brief Leibniz' vom April 1705, (Mathem. Schriften, Abt. I, Bd. III = Bd. III der 3. Folge der Ges. Werke, Halle 1855, p. 94 ff.); sodann verschiedene Briefe Leibniz' an Joh. Jac. Hermann, Histoire de l'Académie des Sciences de Berlin 1757 (1759), p. 471 ff.; Mathem. Schriften, Abt. I, Bd. IV = Bd. IV der 3. Folge der Ges.

hat M. Cantor, ursprünglich selbst auf diesem Standpunkt stehend[1]), dies später als irrig nachgewiesen.[2]) Auf Neu-Holland herrscht angeblich noch heute ein binäres System und auch sonst sollen sich in Ozeanien schwache Reste davon finden.[3])

Von solchen einzelnen, jedoch durchweg mehr oder weniger zweifelhaften Ausnahmen abgesehen, hat sich somit überall die dezimale resp. die eng damit zusammenhängende vigesimale oder auch eine mit vigesimalen bzw. quinaren Elementen durchsetzte dezimale Zählmethode herausgebildet. „10 Finger hab' ich, an jeder Hand 5, und 20 an Händen und Füßen", — in

---

Werke, Halle 1859, p. 265 ff; Opera omnia, l. c. p. 515 ff.; ferner Lettre sur „la philosophie chinoise" à M. de Remond, section quatrième, Leibnitii Epistolae ad diversos, herausg. v. Chr. Kortholt, vol. II, Leipzig 1735, p. 488—494 = Opera omnia, t. IV, Pars I, p. 207—210. Leibniz erblickte in der Möglichkeit, alle Zahlen durch 0 und die Einheit auszudrücken, einen mathematischen Beweis für die Erschaffung der Welt aus Nichts (s. a. das unserem § 2 vorgesetzte Wort Laplaces) und widmete dem Herzog Rudolf August von Braunschweig ein Medaillon, dessen Vorderseite das Bild des Herzogs aufwies, während auf der Rückseite die Zahlen 1—17 in dyadischer Schreibweise dargestellt waren mit der Randinschrift „omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum" und der Unterschrift „imago creationis". Eine Abbildung dieser Medaille und eine Wiedergabe der Leibnizschen Widmung findet man in der Schrift „Gottfried Wilhelms Baron von Leibnitz Mathematischer Beweis der Erschaffung und Ordnung der Welt", entw. von Rud. Aug. Nolten, Leipzig 1734; s. a. Leibnitii Opera omnia, t. III, p. 346—348.

1) „Zur Geschichte der Zahlzeichen", Zeitschr. für Mathem. und Phys. III, 1858, p. 338.

2) Cantor, „Mathem. Beiträge zum Culturleben der Völker", Halle 1863, p. 48 ff., sowie p. 44; „Gesch. d. Math.", I, 3. Aufl., p. 10, s. a. ibid. p. 675 Anm. — Weiteres über dies System der Kuas s. u. a. bei Hatamen, „Oracles japonais", La Revue de Paris, 12ième année, t. VI, 1905, Nov.-Déc., p. 589 ff., ferner bei Chr. Carl Jos. Bunsen, „Gott in der Geschichte oder der Fortschritt des Glaubens an eine sittliche Weltordnung", 3. Theil, Lpz. 1858, p. 399. Siehe a. Interméd. des mathém. 13, 1906, p. 72/73 (H. Brocard).

3) L. Frobenius, „Die Mathematik der Oceanier", Naturwiss. Wochenschr. 14, 1899, p. 573—581. 589—591.

diesem auch von Hankel zitierten Kindervers sind die Grundlagen für alle bei den verschiedenen Völkern entstandenen Zählweisen und Zahlensysteme enthalten. Indem die Natur uns mit 10 Fingern ausrüstete, wies sie zugleich der Rechenkunst eine bestimmte Richtung, und wir dürfen uns jetzt höchstens fragen, ob sie ihre Wahl glücklich traf oder nicht. Wer einseitig auf möglichste Ökonomie in der Varietät der Zahlzeichen Gewicht legt, wird sich mit Leibniz für die Dyadik begeistern[1]), da hier bereits zwei Zahlzeichen — 0 und 1 — ausreichen, doch leidet dieses System an dem Übelstand, daß in ihm schon ziemlich kleine Zahlen eine relativ große Anzahl von „Stellen" bekommen, also die Schreibweise eine umständliche ist (vgl. die Darstellung in § 2). Das Gegenstück würde dargestellt werden durch ein Zahlensystem mit sehr großer Grundzahl, in dem man zwar eine große Anzahl verschiedener Zahlzeichen und -Namen dem Gedächtnis einzuprägen hätte, dafür aber die einzelnen Zahlen mit relativ wenig „Stellen" schreiben könnte. Als Beispiel sei das Zahlensystem angeführt, das wohl unter allen jemals praktisch angewandten die größte Grundzahl[2]) aufzuweisen hat, das schon genannte sexagesimale. Immerhin ist diese Grundzahl für das praktische Rechnen des täglichen Lebens jedenfalls bereits zu groß und Zahlensysteme mit einer zwischen den betrachteten beiden Extremen (2 und 60) liegenden Grundzahl, also auch das dezimale, verdienen im allgemeinen in dieser Beziehung den Vorzug.

---

1) Beispielsweise sei genannt Brander (s. liter. Index); zitiert findet man ferner eine Schrift des Jenenser Professors Johann Bernhard Wiedeburg (1687—1766): „De praestantia arithmeticae binariae prae decimali." — Es sei hier noch erwähnt, daß Leibniz auch eine dyadische Darstellung der Ludolphschen Zahl vorgeschlagen hat, s. z. B. Opera omnia, t. III, p. 547; s. a. Interméd. des mathém. 8, 1901, p. 87 (G. Vacca). Siehe auch „Encyclopädie der mathem. Wissenschaften", Bd. I, p. 59 (A. Pringsheim).

2) Von dem von Karl XII. von Schweden geplanten 64-System wird noch die Rede sein.

Das Sexagesimalsystem gibt uns sogleich Gelegenheit, noch auf einen anderen Punkt hinzuweisen, durch den dies System ohne Zweifel vor den meisten anderen ausgezeichnet ist: seine Grundzahl 60 ist eine der Zahlen, die im Verhältnis zu ihrer Größe außerordentlich viele Teiler besitzen, und Leopold Kronecker hat die Erfolge der Babylonier in der Zahlenwissenschaft zu einem wesentlichen Teile auf die Anregungen, die die Benutzung dieses Zahlensystems dem Zahlensinn geben mußte, zurückgeführt.[1]) Wer diesen Punkt — möglichste Teilbarkeit der Grundzahl — als entscheidend ansieht, andererseits aber keine sonderlich große Grundzahl, sondern etwa eine der 10 an Größe nahestehende haben will, wird den Siegespreis im Wettbewerb der Grundzahl 12 zusprechen, die, ohne erheblich größer als 10 zu sein, doppelt so viele Teiler wie dieses besitzt (unter Ausschluß der 1 und der Zahl selbst gerechnet). In der Tat hat denn auch ein Duodezimalsystem zahlreiche Anhänger gefunden und selbst seine praktische Einführung ist empfohlen worden, so von dem berühmten Naturforscher Buffon[2]) und besonders eindringlich und beharrlich von dem deutschen Mathematiker Joh. Fr. Chr. Werneburg[3]) (1777—1851). Naturgemäß hat auch das damit verwandte Sechsersystem Anhänger gefunden[4]); übrigens soll es nach neuerer Auffassung auch ein Sechsersystem gewesen sein, aus dem das schon mehrfach genannte Sexagesimalsystem der Babylonier sich

---

1) L. Kronecker, „Vorlesungen über Zahlentheorie", herausg. v K. Hensel, I, 1901, p. 7.

2) Ich entnehme diese Notiz der „Geschichte der Elementar-Mathematik" von J. Tropfke, Bd. I, Lpz. 1902, p. 4, wo Näheres angegeben ist.

3) Werneburg, „Kurze Darstellung eines neuen Zahlen- und darnach gegebenen Maass-, Gewichts- und Münz-Systems", 1798. Angaben über weitere Schriften desselben über den gleichen Gegenstand s. bei Edward Ullrich, „Das Rechnen mit Duodecimalzahlen", Progr. Realschule Heidelberg 1891, p. 5/6.

4) Siehe „Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften", Bd. I, p. 941, Anm. 2 (R. Mehmke), sowie E. Ullrich, l. c. p. 5; überhaupt sei für die Geschichte und Literatur der verschiedenen Zahlensysteme auf den § 2 dieser zuletzt genannten Schrift besonders verwiesen.

— durch Vermischung mit dem Zehnersystem — entwickelt hat.[1])

Auf dieses babylonische Sexagesimalsystem sind zurückzuführen die noch jetzt in Geometrie und Zeitrechnung üblichen Einteilungen des Kreises in 360 Grade, des Grades und der Stunde in 60 Minuten und 60^2 Sekunden. Auch sonst waren und sind sexagesimale, duodezimale und sextale Teilungen ja vielfach in Gebrauch und sind an sich bei der relativ großen Anzahl der Teiler von 6, 12, 60 gewiß sehr praktisch[2]); wir führen als Beispiele an aus der Griechenzeit[3]): 1 Talent = 60 Minen, 1 Drachme = 6 Obolen, 1 Stater = 12 Obolen; aus der Römerzeit[4]): 1 as = 12 Unzen, 1 actus = 12 decempedae = 120 Fuß; aus neuerer Zeit: 1 Ruthe = 12 Werkfuß (sogen. Duodezimalfuß) = 12^2 Zoll = 12^3 Linien = 12^4 Skrupel[5]); weiter seien erwähnt die Einteilung der Fahrenheitschen Thermometerskala, die Teilung des Shilling in 12 Pence, sowie die Bezeichnungen Dutzend, Groß usw.[6]) Ob solche Einteilungen neben einem dezimalen

1) M. Cantor, „Geschichte der Mathematik", Bd. I, 3. Aufl., p. 32, 37 nach G. Kewitsch.

2) Lagrange erblickte in der großen Teilerzahl der 12 keinen Vorteil, sondern ging in seinem Widerspruch gegen duodezimale Teilungen und in seinem Eintreten für ein dezimales metrisches System in voller Reinheit so weit, daß er sich als Mitglied der von der französischen Nationalversammlung zur Ausarbeitung eines neuen Maßsystems eingesetzten Kommission zu der paradoxen — wohl nicht ganz ernst gemeinten — Behauptung verstieg, es sei nur bedauerlich, daß die Grundzahl des Zahlensystems 10 sei und nicht eine Primzahl, etwa 11, und zwar deswegen, weil dann die Übereinstimmung im Nenner bei allen Brüchen mit dieser Zahl als Nenner eine notwendige und dauernde sein würde; s. Delambre, „Notice sur la vie et les ouvrages de M. Lagrange", Mém. de la classe des sciences mathém. et physiques de l'Institut 13, 1812, Histoire, p. LXVI.

3) Friedrich Hultsch, „Griechische und römische Metrologie", 2. Bearbeitung, Berlin 1882, p. 127, 132, s. a. ibid. p. 101, 104, 505.

4) Hultsch, l. c. p. 144 ff., 78.

5) J. A. Eytelwein, „Vergleichungen der gegenwärtig und vormals in den königlich preußischen Staaten eingeführten Maasse und Gewichte", 2. Aufl., Berlin 1810, p. 5/6.

6) Auch die Bußzahlen der germanischen Volksrechte sind nach

Zahlensystem auch noch zweckmäßig sind, kann allerdings bezweifelt werden, und in der Tat hat schon der geniale vlämische Mathematiker Simon Stevin (1548—1620) als der Erfinder des Rechnens mit Dezimalbrüchen die Dezimalteilung im Münz-, Maß- und Gewichtssystem gefordert und der Hoffnung Ausdruck gegeben, daß ein künftiges Menschengeschlecht seinen Plan verwirklichen werde.[1]) Jahrhunderte freilich sind vergangen, bis diese Hoffnung erfüllt und, wie bekannt, durch die französische Revolution, das metrische System für Maß und Gewicht eingeführt wurde, das dann von da ab seinen Siegeszug über einen großen Teil der Erde bereits gehalten hat und die bisher noch nicht oder nur teilweise eroberten Teile (England[2]), Vereinigte Staaten, Japan, Rußland usw.) sich gewiß auch einmal vollständig unterwerfen wird. Auch für die Winkelgrößen brachte die Revolutionsära den ersten Versuch einer Dezimal- resp. Zentesimalteilung: es wurden unter Leitung von Prony und Mitwirkung von Legendre[3]) und Delambre entsprechende logarithmisch-trigonometrische Tafeln, ein groß angelegtes Unternehmen[4]), ausgearbeitet, und von den 4 für die französische Meridianmessung Dünkirchen-Barcelona (1792 und folgende Jahre) benutzten Bordaschen Kreisen hatten 3 dezimale Gradteilung (Teilung des Kreises in 400 statt 360 Grad).[5]) Im

Heinr. Brunner, „Duodecimalsystem und Decimalsystem in den Bußzahlen der fränkischen Volksrechte", Berl. Sitzungsber. 1889 II, p. 1039/1040, bei den meisten Volksstämmen duodezimaler, bei einigen dagegen dezimaler Natur.

1) Siehe M. Cantor, „Geschichte", II, 2. Aufl., p. 616. — In der ersten Auflage unseres Buches war nach Lucas, „Récr. mathém.", I, p. 147, fälschlich eine entgegengesetzte Angabe über Stevin gemacht.

2) Angeblich soll kein geringerer als Herbert Spencer seine Landsleute vor obligatorischer Einführung des metrischen Systems gewarnt haben, s. Interméd. des mathém. 12, 1905, p. 27 (Question 2878).

3) Siehe z. B. Élie de Beaumont, „Eloge historique de A.-M. Legendre", Mém. de l'académie des sciences de Paris, t. 32, 1864, p. LXI/LXII.

4) Siehe Näheres in M. Cantors „Geschichte", IV, 1908, p. 439 f. (A. v. Braunmühl).

5) Siehe Delambre, „Base du système mètrique décimal, ou me-

geographischen Dienst der französischen Armee ist diese Zentesimalteilung bis heute im Gebrauch geblieben und gewann in neuerer Zeit dort weiter an Boden.[1]) Mit Einführung der hundertteiligen Winkelminuten und Winkelsekunden wird vielfach auch die Einführung der entsprechenden hundertteiligen Zeitmaße angestrebt. An eine Änderung der Stundeneinheit denken jedoch auch die entschiedenen Reformer nicht[2]), wohl aber hatte man zur Zeit der französischen Revolution eine solche Änderung erwogen, nämlich die, den Tag in 20 Stunden zu teilen.[3])

Neben dem duodezimalen resp. sextalen System sind ein Vierer-, ein Achtersystem und verwandte vorgeschlagen und empfohlen worden, und es läßt sich nicht leugnen, daß Teilungen in 2 und durch Wiederholung also in 4, 8, 16 usw. Teile[4]) für die Vorstellung am einfachsten und bequemsten sind. Wir haben denn auch das Viertelliter als Maß in Gebrauch, und die gesetzliche Zulassung des Viertelpfundsgewichts ist aus den Kreisen des Handels heraus verschiedentlich gefordert worden. Karl XII.

---

surp de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes, par M. M. Méchain et Delambre", t. I, Paris 1806, p. 98 (Discours préliminaire).

1) Siehe H. Brocard im Interméd. des mathém. 14, 1907, p. 91/92.

2) Siehe über diese Fragen etwa E. Hammer, „Dezimale Stundenteilung", Umschau, 4. Jahrg., 1900, p. 921/922.

3) In dem Pariser Museum Carnavalet, einem Museum von Bildern, Medaillen usw. aus der Revolutionsära, befinden sich nach A. Rebière, „Mathématiques et Mathématiciens", 2ième éd., 1893, p. 282/283 noch dezimale Turm- und Taschenuhren.

4) Erinnert sei daran, daß Ampère in seinem „Essai sur la philosophie des sciences, ou Exposition analytique d'une classification naturelle de toutes les connaissances humaines" (t. I, 1834; II, 1843) nach diesem Teilungsprinzip die Gesamtheit der Wissenschaften einteilte und so im ganzen 2 Hauptreiche, 4 Unterreiche, 8 Provinzen („embranchements"), 16 Unterprovinzen, 32 Wissenschaften erster Ordnung, deren 64 zweiter und 128 dritter Ordnung erhielt; s. insbesondere auch die jedem der beiden Bände beigegebene Tafel der „Classification des connaissances humaines".

von Schweden soll sich mit der Absicht getragen haben, ein Zahlensystem mit der Basis 64 einzuführen, eben da diese Zahl sich fortgesetzt (bis zur Einheit) durch 2 teilen läßt.[1]) Emanuel Swedenborg, der bekannte schwedische Gelehrte und Theosoph, empfahl[2]) aber, statt der allzu großen Zahl 64 und in Anbetracht der vielen alsdann erforderlichen neuen Zahlzeichen als Grundzahl 8, die überhaupt in dieser Beziehung von den verschiedenen Potenzen der 2 am meisten Anhänger gefunden hat.[3])

---

1) Seine Wahl fiel gerade auf diese Potenz von 2 angeblich, weil sie zugleich Quadrat und Kubus sei; s. Voltaire, „Histoire de Charles XII", Oeuvres complètes, t. 28, Gotha 1785, p. 342/343; s. a. (Nordberg), „Konung Carl XII. Historia", Teil II, Stockholm 1740, p. 599—602.

2) Siehe G. Eneström, „Emanuel Svedenborg såsom matematiker", Bihang till Svenska Vet.-Akad. Handlingar, Bd. 15, Afd. I, Nr. 12, Stockholm 1890, p. 25—26, sowie a. Interméd. des mathém. 7, 1900, p. 227/228.

3) Eine ältere Schrift s. zunächst bei Edward Ullrich, l. c. p. 5; es sei weiter genannt Aimé Mariage, „Numération par huit anciennement en usage par toute la terre prouvée par les Koua des Chinois, par la Bible, par les livres d'Hésiode, d'Homère, d'Hérodote" usw., Paris 1857, ein Buch, in dem die Zahl 8 als fundamental in der ganzen Menschheitsgeschichte nachgewiesen und z. B. gezeigt wird, daß der trojanische Krieg nicht 10, sondern 8 Jahre dauerte (p. 125), daß wahrscheinlich nicht 10, sondern 8 „Plagen" über Ägypten kamen (p. 213) usw. Weiter empfahlen ein Oktavalsystem: Colenne, „Le système octaval ou la numération et les poids et mesures réformés", Paris 1845; s. a. C. R. de l'Académie des Sc., t. 55, 1862, 2^me^ semestre, p. 409, sowie Interméd. des mathém. 7, 1900, p. 370/371 (H. Brocard); siehe ferner nach dem literar. Index die Schriften von Ch. Berdellé (1887 und 1897, letztere mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Musik), Woolsey Johnson (1891/2), Gelin (1896; s. a. die Interméd. des mathém. 9, 1902, p. 299 zitierte Stelle). — Für die Literatur über das Vierersystem sei verwiesen auf E. Ullrich, l. c. p. 4/5. — Für ein Sechzehnersystem wird zitiert: John W. Nystrom, „Project of a new system of arithmetic . . . . with sexteen to the base", Philadelphia 1862. Erwähnt sei dabei auch, daß von Adam Wizel in dem „Archiv für Psychiatrie und Nervenkrankheiten", 38. Bd., Berlin 1904, p. 122—155 „ein Fall von phänomenalem Rechentalent bei einem Imbecillen" beschrieben ist, der hier insofern

Wir dürfen diese Betrachtungen damit beschließen, daß wir mit Hankel[1]) sagen: *Das quaternäre (besser wohl: oktavale) oder das duodezimale Zahlensystem entsprechen der geistigen Natur des Menschen vorzugsweise, vermochten sich jedoch gegenüber dem durch leibliche Bedingungen gegebenen dezimalen nirgends durchzusetzen.*

§ 2. Das dyadische oder binäre System.

Leibnitz crut voir l'image de la création dans son Arithmétique binaire. . . . Il imagina que l'unité pouvait représenter Dieu, et séro le néant, et que l'Être suprême avait tiré du néant tous les êtres, comme l'unité avec le séro exprime tous les nombres dans ce système d'Arithmétique.

Cette idée plut tellement à Leibnitz qu'il en fit part au jésuite Grimaldi, président du tribunal de Mathématiques à la Chine, dans l'espérance que cet emblème de la création convertirait au christianisme l'empereur d'alors, qui aimait particulièrement les sciences.

Je ne rapporte ce trait que pour montrer jusqu'à quel point les préjugés de l'enfance peuvent égarer les plus grands hommes.

LAPLACE.
Siehe Oeuvres complètes, t. VII, 1886, p. CXIX.

In dem dyadischen oder binären System als demjenigen, das zur Grundzahl die 2 besitzt, also alle Zahlen, wie schon in § 1 gesagt, mit zwei Zahlzeichen, 0 und 1, ausdrückt, stellen sich die Zahlen der Zahlenreihe folgendermaßen dar:

1 =	*1*	9 =	*1001*
2 =	*10*	10 =	*1010*
3 =	*11*	11 =	*1011*
4 = 2^2 =	*100*	12 =	*1100*
5 =	*101*	13 =	*1101*
6 =	*110*	14 =	*1110*
7 =	*111*	15 =	*1111*
8 = 2^3 =	*1000*	16 = 2^4 =	*10000* etc.

interessiert, als die betreffende Person, ein 22jähriges Mädchen, für ihre Rechnungen neben dem dekadischen ein Sechzehnersystem vielfach zu benutzen scheint (s. dort besonders p. 125, 136, 137).

1) Hankel, l. c. p. 21.

Betrachten wir auch 1 als (nullte) Potenz von 2, so können wir hiernach offenbar sagen:

Satz: *„Jede Zahl läßt sich als Summe von untereinander verschiedenen Potenzen der 2 (einschließlich der nullten) auf eine und nur eine Weise darstellen."*

Die allgemeine Richtigkeit dieses Satzes erhellt leicht, wenn man die darzustellende Zahl sich dividiert denkt durch die größtmögliche Potenz von 2, die noch kleiner ist als die Zahl, also etwa durch 2^μ, und sodann den Rest der Division durch die nächstkleinere Potenz der 2, also $2^{\mu-1}$, usf.; die Quotienten der Divisionen sind dann stets 1 oder 0. — Man kann unseren Satz aber auch beweisen aus der identischen Gleichung

$$\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\cdot\ldots\ldots\frac{1-x^{(2^\mu)}}{1-x^{(2^{\mu-1})}}=\frac{1-x^{(2^\mu)}}{1-x}.$$

Führt man nämlich in dieser Identität rechts und links die Divisionen einzeln aus, so erhält man

$$(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^8)\ldots\ldots(1+x^{(2^{\mu-1})})$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots\cdots+x^{2^\mu-1}$$

Multipliziert man nun links das Produkt aus, so erhält man einen Ausdruck von der Form $1+x^{a_1}+x^{a_2}+x^{a_3}\ldots$ und zwar sind die $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots$ Summen, deren Summanden der Reihe der Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, .. $2^{\mu-1}$, d. h. der Reihe der Potenzen von 2, jede Potenz jedoch höchstens einmal genommen, angehören. Da beide Seiten der Gleichung identisch gleich sind, so müssen die $a_1, a_2, a_3 \ldots$ sämtliche Zahlen der Zahlenreihe — wie rechts: 1, 2, 3 ... — liefern, d. h. umgekehrt: die Zahlen der Zahlenreihe lassen sich alle als Summen von untereinander verschiedenen Potenzen der 2 darstellen und zwar nur auf eine Weise, w. z. b. w.

Wir geben zunächst noch eine tabellarische Zusammenstellung der niedrigsten unter den Potenzen der 2:

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256

Eine praktische Bedeutung dieser Reihe von Potenzen der 2 mag der Leser darin erblicken, daß dieselbe die Maximalzahlen für die Ahnen eines Menschen in den verschiedenen Generationen angibt: es hat jeder 2 Eltern und weiter — wenigstens in denjenigen Ländern, in denen Verbindungen zwischen Geschwistern gesetzlich verboten, zwischen Vetter und Base dagegen zulässig sind — 4 Großeltern, 4—8 Urgroßeltern, 4—16 Ururgroßeltern usw.

Wir fügen zu der obigen Tabelle noch hinzu:

$$2^{64} = 18446744073709551616.$$

Diese Zahl spielte nach einer bekannten Legende eine Rolle bei der Erfindung des Schachspiels[1]), bei dem ja auf 64 Feldern gestritten wird. Der Erfinder desselben, Sissa ben Dahir, sollte sich von dem indischen Könige Schahram (Shihrâm) eine Belohnung ausbitten und bat nun darum, daß man ihm das erste Feld seines Brettes mit einem Weizenkorn, das zweite mit zwei und jedes folgende mit der doppelten Anzahl belegte. Als Gesamtsumme ergibt sich alsdann

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1,$$

also ein Korn weniger als die obige 20-stellige Zahl angibt, eine Menge, die den Vorrat der königlichen Kornkammer weit überstieg und die ausreichen würde, um das ganze feste Land der Erde bis zu einer Höhe von fast 1 cm zu bedecken.[2])

---

1) Vgl. A. van der Linde, „Geschichte und Litteratur des Schachspiels", Berlin 1874, Bd. I, p. 4 ff., sowie Vorwort zu Bd. II.

2) Eine eigenartige Veranschaulichung der in Frage stehenden

Zu welch' großen Zahlen die Potenzen von 2 bei weiterer Fortsetzung der obigen Tabelle eben sehr bald werden, mag neben dem eben erwähnten Beispiel auch noch folgendes veranschaulichen: angenommen, es passiere um Mitternacht ein Verbrechen, etwa ein Mord; ein Augenzeuge teile dies in der ersten Viertelstunde 2 anderen Menschen mit und jeder dieser in der nächsten Viertelstunde 2 anderen, noch nicht benachrichtigten usf, so wäre bereits bis $7^1/_2$ Uhr die ganze Menschheit davon unterrichtet. Es könnten nämlich um $7^1/_2$ Uhr, d. h. nach Verlauf von 30 Viertelstunden, bereits

$$1 + 2 + 4 + 8 \cdots + 2^{30} = 2^{31} - 1,$$

ca. 2000 Millionen, also mehr als die ganze Menschheit ausmacht, davon unterrichtet sein.

§ 3. Verschiedene dyadische Spiele und Aufgaben.

Die in dem „Satze" des vorigen Paragraphen ausgesprochene Möglichkeit der Darstellung jeder Zahl als Summe verschiedener Potenzen der 2 resp. die dyadische Schreibweise der Zahlen finden bei zahlreichen Spielen und Aufgaben Anwendung, von denen wir hier jetzt eine Reihe besprechen wollen.[1])

I. Das Erraten einer gedachten Zahl.

In einer Gesellschaft denkt man sich eine Zahl, die der vorher hinausgesandte A sich anheischig macht zu erraten,

---

großen Zahl gibt die „Chronologie" des arabischen Mathematikers Bîrûnî, s. Ed. Sachau, „Algebraisches über das Schach bei Bîrûnî", Zeitschr. der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft, Bd. 29, 1875, p. 155. Vgl. auch A. v. d. Linde, l. c., Bd. II, Vorwort, p. X; Cantor, „Gesch. d. Math.", I, 3. Aufl., p. 757/8.

1) Für sonstige Anwendungen des dyadischen Zahlensystems seien hier genannt eine Schrift von G. Peano (s. liter. Index), die ein auf der Dyadik beruhendes, auch für Schreibmaschine und Telegraphie verwendbares System der Kurzschrift vorschlägt, ferner Oskar Simony, „Über den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung", Wiener Sitzungsber., Math.-naturw. Cl., 2 Abth., 96. Bd., Jahrg. 1887, p. 191—286.

falls der mit ihm unter einer Decke spielende *B* ihn durch einige aneinandergelegte Münzen auf die richtige Fährte führen darf, wobei es, wie *A* und *B* etwa geheimnisvoll behaupten, auf die Winkel ankomme, unter denen die Münzen aneinandergelegt sind. Die Verabredung zwischen *A* und *B* geht einfach dahin, daß die Kehrseite einer Münze immer eine Null, die Bildseite dagegen die verschiedenen Potenzen von 2 und zwar von links anfangend sukzessive 1, 2, 4, 8, ... bedeuten soll. *B* stellt die gedachte Zahl dann einfach als Summe von Potenzen der 2 dar; wenn er dem *A* also z. B. die Zahl 22 (= 2 + 4 + 16) bezeichnen will, legt er die erste Münze links umgekehrt, die zweite mit Bild nach oben (2), die dritte mit Bild (4), die vierte umgekehrt und die fünfte mit Bild (16).

II. Ein Bild, das jemand sich gedacht hat, zu erraten.

Stellen wir die Zahlen 1—31 als Summen von Potenzen der 2 dar, so kommt jede dieser Potenzen hierbei gleich oft, nämlich 16mal, vor, wie die unten stehende Tabelle zeigt, in der in Spalte I diejenigen Zahlen stehen, die bei dieser Darstellung der unten stehenden 1 benötigen, in Spalte II diejenigen, bei denen die unten stehende 2 auftritt, usw.

V	IV	III	II	I
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	8	4	2	1

An Stelle dieser Zahlen mögen nun 31 verschiedene Bilder in der Reihenfolge der Zahlen auf einer Karte verzeichnet sein und dazu aus einem äußeren Grunde — um eine bequeme Anordnung der Bilder, nämlich in 4 Reihen zu je 8, zu bekommen — noch ein 32stes. Außerdem mögen noch 5 kleinere Karten vorhanden sein, die entsprechend den 5 Spalten der obigen Tabelle je 16 der 32 Bilder aufweisen und zwar gerade diejenigen, deren Platzzahlen in der betreffenden Spalte vorkommen, d. h. Karte I Bild 1, 3, 5, 7 ... usw. Alsdann ist unser Spiel fertig.[1]) **Es denkt sich nun jemand ein Bild der Hauptkarte und wird dann gefragt, auf welcher der fünf Nebenkarten es vorkommt, wonach sich ohne jede Schwierigkeit die Platznummer und damit das gedachte Bild bestimmen läßt.** Kommt dasselbe z. B. auf den Karten I, III und IV vor, so hat es auf der Hauptkarte die Platznummer $1 + 4 + 8 = 13$. Kommt es auf keiner der 5 Nebenkarten vor, so ist es das 32ste.

Auch mit der Grundzahl 3 statt 2 läßt sich das Spiel aufbauen[2]), indem die Potenzen der 3 eine ganz ähnliche Dar-

---

1) Der Ursprung dieser von Ed. Lucas („Récr. mathém.", I, p. 154) als „geheimnisvoller Fächer" bezeichneten Spielerei ist mir nicht bekannt. Die Angabe bei Ball, „Récr. mathém. et problèmes", 2. franz. Ausg. von Fitz-Patrick, I, 1907, p. 196, daß Bachet diese Unterhaltung angegeben habe, ist unrichtig und dahin zu verbessern, daß sie sich nur in der von A. Labosne besorgten Bachet-Ausgabe und zwar in dem lediglich vom Herausgeber herrührenden „Supplément" (Problème X) findet (Ausg. von 1879, p. 198). Ich zitiere außerdem die im literar. Index aufgeführten Schriften von Charles Hautin von 1862 (p. 115—120) und von G. A. Riecke (3. Heft, 1873, p. 11—13), sowie die gleichfalls im Index verzeichneten Artikel von M. Cantor und Felix Müller aus Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20, 1875, und 21, 1876. — Die Firma Paul Joschkowitz in Magdeburg hat nach dem Vorschlage des Verfassers das Spiel kürzlich mit den 32 Standbildern der „Siegesallee von Berlin" und unter diesem Namen in den Handel gebracht (D. R. G. M. 375525). Eine andere im Handel vorkommende Form unseres Spiels werden wir, da ihre Besprechung weitere Ausführungen erfordert, im nächsten Abschnitt (III) dieses Paragraphen behandeln.

2) Riecke, l. c. p. 13; A. Labosne, l. c. (Bachet-Ausgabe 1879), p. 199.

stellung aller Zahlen liefern; nur muß man sie bald positiv, bald negativ in Rechnung stellen. Man erhält so aus den Potenzen der 3, nämlich 1, 3, 9, 27 usw., folgende Darstellung der Zahlen der Zahlenreihe:

$1 = 1$	$10 = 9 + 1$	$19 = 27 - 9 + 1$
$2 = 3 - 1$	$11 = 9 + 3 - 1$	$20 = 27 - 9 + 3 - 1$
$3 = 3$	$12 = 9 + 3$	$21 = 27 - 9 + 3$
$4 = 3 + 1$	$13 = 9 + 3 + 1$	$22 = 27 - 9 + 3 + 1$
$5 = 9 - 3 - 1$	$14 = 27 - 9 - 3 - 1$	$23 = 27 - 3 - 1$
$6 = 9 - 3$	$15 = 27 - 9 - 3$	$24 = 27 - 3$
$7 = 9 - 3 + 1$	$16 = 27 - 9 - 3 + 1$	$25 = 27 - 3 + 1$
$8 = 9 - 1$	$17 = 27 - 9 - 1$	$26 = 27 - 1$
$9 = 9$	$18 = 27 - 9$	$27 = 27.$

Die mathematische Begründung für dieses Verfahren ist folgende Identität zu geben geeignet:

$$\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^{27}}{1-x^9}\cdot\cdots\cdot\frac{1-x^{(3^\mu)}}{1-x^{(3^{\mu-1})}}=\frac{1-x^{(3^\mu)}}{1-x}.$$

Die Gleichung ist der oben (§ 2) für binäre Zwecke benutzten ganz analog, und ganz entsprechend wie dort erhält man jetzt:

$$(1+x+x^2)\cdot(1+x^3+x^6)\cdot(1+x^9+x^{18})\ldots(1+x^{(3^{\mu-1})}+x^{2\cdot(3^{\mu-1})})$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\cdots+x^{3^\mu-1}.$$

Dividiert man nun von den Faktoren der linken Seite den ersten durch x, den zweiten durch x^3, den dritten durch x^9 usw., den letzten durch $x^{(3^{\mu-1})}$ und dementsprechend die rechte Seite durch $x^{1+3+9\cdots+3^{\mu-1}}=x^{\frac{1}{2}(3^\mu-1)}$, so erhält man[1]):

$$(x^{-1}+1+x^1)\cdot(x^{-3}+1+x^3)\cdot(x^{-9}+1+x^9)\ldots(x^{-(3^{\mu-1})}+1+x^{(3^{\mu-1})})$$
$$=x^{-\frac{1}{2}(3^\mu-1)}+x^{-\frac{1}{2}(3^\mu-3)}+\cdots+x^{-2}+x^{-1}+1+x^1$$
$$+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{\frac{1}{2}(3^\mu-1)}.$$

---

1) Felix Müller, l. c. p. 228; s. auch Euler, „Introductio in analysin infinitorum", t. I, Lausanne 1748, Cap. XVI, p. 274/5.

Rechts stehen als Potenzexponenten alle positiven und negativen ganzen Zahlen zwischen $-\frac{1}{2}(3^{\mu}-1)$ und $+\frac{1}{2}(3^{\mu}-1)$, wo μ beliebig groß sein darf. Alle diese Zahlen müssen sich also auch auf der linken Seite als Potenzexponenten ergeben, wenn die Multiplikation dort ausgeführt wird; sie, d. h. die fortlaufenden ganzen Zahlen der Zahlenreihe, müssen also alle darstellbar sein als algebraische Summen der Potenzen der 3 und zwar jede auch nur auf eine Art. Denn die Faktoren der linken Seite unserer Identität sind alle positiv, so daß also das durch das Ausmultiplizieren entstehende Aggregat nur positive Glieder enthält, eine gegenseitige Aufhebung zweier Glieder gegeneinander also ausgeschlossen ist. —

Die für das Spiel zu verwendenden Karten („Nebenkarten") würden, wenn man sich auf das Zahlenintervall 1—27 beschränkt, so aussehen:

VII	VI	V	IV	III	II	I
14	14	5	5	2	2	1
15	15	6	6	3	5	4
16	16	7	7	4	8	7
17	17	8	14	11	11	10
18	18	9	15	12	14	13
19	19	10	16	13	17	16
20	20	11	23	20	20	19
21	21	12	24	21	23	22
22	22	13	25	22	26	25
23	−9	+9	−3	+3	−1	+1
24						
25						
26						
27						
+27						

Die Zahl, der jede Karte entspricht, haben wir hier daruntergeschrieben. Befindet sich also die gedachte Zahl beispielsweise auf den Karten II, III, VI, VII, so ist sie $= -1 + 3 - 9 + 27 = 20$. Befindet sich die Zahl auf Karte I, so braucht der Ratende die Karte II gar nicht mehr vorzu-

zeigen[1]), da die Zahl hierauf doch nicht stehen kann, und dasselbe gilt vice versa; ebenso ist es mit den Kartenpaaren III und IV, sowie auch mit V und VI.[2])

III. Nochmals das Erraten einer gedachten Zahl.

Wir wenden uns nunmehr zu der bereits im vorigen Abschnitt (Anm. 1, S. 40) angekündigten Besprechung eines in den Handel gelangten Spiels[3]), das nur eine andere, wenn auch recht interessante Form des in II behandelten Zahlenratespiels darstellt. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung: Nehmen wir

---

1) Felix Müller, l. c. p. 228 vereinigt je ein solches Paar von Karten zu einer. Diejenigen Zahlen, für welche die der Karte entsprechende Zahl negativ zu nehmen ist, also die Zahlen unserer Karten II, IV, VI, wären dann in besonderem Druck, etwa Fettdruck, auf die anderen Karten (bei uns: I, III, V) zu übertragen und der Ratende müßte sich jedesmal auch eine Angabe darüber erbitten, ob die auf der Karte vorhandene Zahl dort in gewöhnlichem oder ausgezeichnetem Druck steht. — Delannoy (Interméd. des mathém. 12, 1905, p. 119/120) entwirft die Karten, indem er sich die Zahlen nach ternärem Zahlensystem dargestellt denkt, also in der Form $22 = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1$; seine Karten entsprechen alsdann nicht den positiven und negativen Potenzen der 3, sondern den Zahlen 1; $2 \cdot 1$; 3; $2 \cdot 3$; 9; $2 \cdot 9$; 27 usw.; man könnte in derselben Weise natürlich mit jedem anderen Zahlensystem das Spiel begründen. Beide Methoden, sowohl die Delannoysche wie die hier benutzte gibt ebendort (p. 144) Ch. Berdellé an.

2) Für die wirkliche Ausführung des Spiels, zumal mit Bildern statt Zahlen, wäre es wohl wünschenswert, daß alle 7 Nebenkarten gleich viele Zahlen oder Bilder enthielten; man könnte zu dem Ende jeder der Karten I und II die Zahlen 3, 6, 9, 12, 15 hinzusetzen, was sich aufheben würde, ebenso den Karten III und IV die Zahlen 1, 8, 9, 10, 17 und den Karten V und VI die Zahlen 1, 2, 3, 4, 23. Alsdann müßte der Ratende allerdings stets alle 7 Karten vorzeigen, würde aber, wenn die gedachte Zahl beispielsweise als auf III und IV vorhanden angegeben würde, ein solches Paar als sich aufhebend ignorieren.

3) Geschützt vom 8. Juni 1901 resp. 8. Okt. 1902 ab durch Deutsches Reichspatent Nr. 140457 und Zusatzpatent Nr. 142611, Patentschriften ausgegeben am 20. April 1903 resp. 20. Juli 1903; ferner Auslandspatente. Inhaberin dieser Patente ist die Firma Paul F. G. Neumann Nachf. (Inh.: Jacob Gutmeyer), Berlin SW. 68, Ritterstr. 82.

zu größerer Einfachheit statt der 5 Nebenkarten in II (S. 39) deren nur 4 an, so werden auf diesen nur die Zahlen 1 bis 15 verzeichnet stehen; jede dieser Zahlen denken wir uns dabei wieder dyadisch dargestellt, d. h. unter Verwendung von nur zwei Zahlzeichen, 0 und 1. Wir haben nun, wenn wir leere Plätze links eventuell durch Nullen ausfüllen, also z. B. $5 = 0101$ schreiben, lauter vierstellige Zahlen und zwar unter Einrechnung der Null deren 16 im ganzen. Jeder dieser 16 Zahlen entspricht also umkehrbar eindeutig ein vierteiliges Zahlenbild, das zusammengesetzt ist aus nur 2 elementaren Zahlzeichen (0 und 1). Statt der elementaren Bilder 0 und 1 könnten wir natürlich auch irgend zwei andere Zeichen, z. B. statt der 1 ein Quadrat, statt der 0 einen wagerechten Strich, wählen und könnten den aus 2 solchen Elementarbildern zusammensetzbaren vierteiligen Bildern, deren es im ganzen $2^4 = 16$ verschiedene — Variationen von 2 Elementen zu 4 mit Wiederholung — gibt, wieder die Zahlen 0, 1, 2 bis 15 zuordnen und zwar auch in irgend einer anderen Reihenfolge als vorher, und hätten dennoch, wofern nur jedem der 16 Bilder eine bestimmte Zahl zugeordnet ist, eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der 16 Bilder und der 16 Zahlen (0, 1, 2, ... 15). Ebenso könnten wir statt der 16 Zahlen 0, 1, 2, ... 15 auch irgend andere 16 Zahlen — wir wollen z. B. sagen: 1, 2, 3 ... 16 — wählen. Wir können also schließlich so sagen: *Aus zwei elementaren Zeichen, einem Quadrat und einem wagerechten Strich, lassen sich 16 verschiedene vierteilige Bilder herstellen; diese können den Zahlen 1, 2, 3 ... 16 so zugeordnet werden, daß jeder Zahl umkehrbar eindeutig ein vierteiliges Bild entspricht.*

Hiernach wenden wir uns zu unserem Spiel selbst, dessen Teile durch Fig. 1 abgebildet werden: Auf einer Hauptkarte *H* stehen die Zahlen 1 bis 16, jede in einer besonderen Zelle; die vier Nebenkarten I, II, III, IV besitzen gleichfalls je 16 den Zellen der Hauptkarte und unter sich kongruente Zellen; von diesen sind die mit □ gezeichneten durchlöchert und durchsichtig, die mit — gezeichneten nicht durchlöchert und undurchsichtig. Betrachten wir nun die in derselben Zeile in Fig. 1

liegenden Zeichen □ und — als ein zusammengehöriges vierteiliges Bild und dieses als der in derselben Zeile liegenden

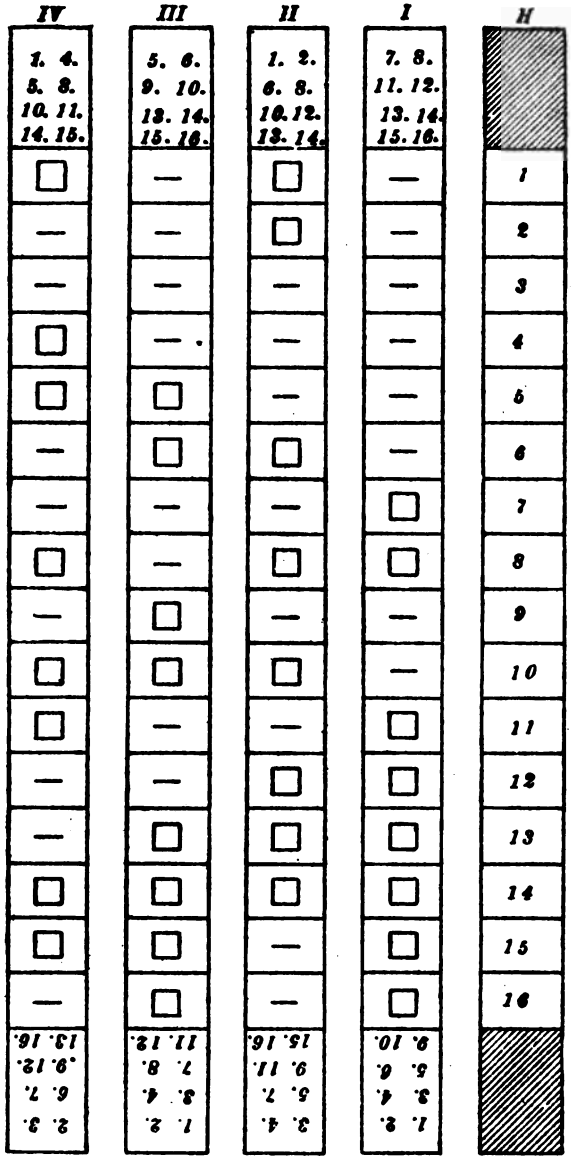


Fig. 1.

Zahl der Hauptkarte H zugeordnet, so sind die 16 den Zahlen 1 ... 16 zugeordneten Bilder alle unter sich verschieden, wie man sich leicht überzeugt. Dementsprechend ist eben die Anordnung getroffen und weiter so, daß je zwei Zahlen von H, die gleich weit von den entgegengesetzten Enden abstehen, d. h. sich zu 17 ergänzen, z. B. 6 und 11, Bilder haben, die gleichfalls „komplementär", d. h. so beschaffen sind, daß das eine auf den Karten ein □ aufweist, auf denen das andere den — hat und vice versa. Eine solche Einrichtung der Karten war leicht zu treffen; es brauchte nur zu jedem vierteiligen Bilde, das eingetragen wurde, gleich das „komplementäre" an entsprechender Stelle mit eingetragen zu werden.[1])

Das Spiel selbst wickelt sich nun in folgender Weise ab: Eine Person B denkt sich eine Zahl im Gebiete 1, 2 ... 16 und gibt auf Befragen an, ob diese sich unter den auf der Karte IV oben stehenden Zahlen befindet. Wird die Frage bejaht, so legt der Ratende, A, die Karte IV wieder so hin wie zu Anfang. Wird die Frage verneint, so dreht A die Karte IV so um, daß „oben" und „unten" vertauscht werden.[2]) Nun wiederholt sich dasselbe mit Karte III und zwar wird diese dann in der erforderlichen Lage auf Karte IV gelegt;

1) Jede einzelne Karte weist also in je zwei Zellen, die gleich weit von den entgegengesetzten Enden abstehen, „komplementäre" Zeichen auf. Dreht man eine Karte um, so daß oben und unten vertauscht werden, so sind in der neuen Lage den Zahlen 1 bis 16 zwar jetzt andere Bilder zugeordnet, aber unter sich verschieden sind auch diese 16 Bilder. Denn, wären jetzt zwei unter sich gleich, so müßten sie es auch nach abermaligem Umdrehen der betreffenden Karte noch sein, da jedes Zeichen hierbei in das komplementäre übergeht; in der ursprünglichen Lage waren aber alle verschieden. Prinzipiell ändert sich also durch ein solches Umdrehen einer oder mehrerer Karten nichts und wir haben auch das Spiel von vornherein entsprechend eingerichtet, indem wir auch an die Fußenden der Karten die für die umgekehrte Lage erforderlichen Zahlen geschrieben haben; es sind dies natürlich gerade die am anderen Ende fehlenden.

2) In der neuen Lage der Karte gehört die gedachte Zahl also jedenfalls zu den „oben" (am Kopfende) befindlichen Zahlen (vgl. die vorige Anmerkung).

darauf wird in gleicher Weise mit den Karten II und I verfahren und zum Schluß die Hauptkarte *H* auf den Haufen gelegt, jedoch mit der bedruckten (Zahlen-) Seite nach unten Kehrt man nun den ganzen Haufen um, so erblickt man durch die Löcher der Nebenkarten nur eine Zahl von *H*, gerade die gedachte.

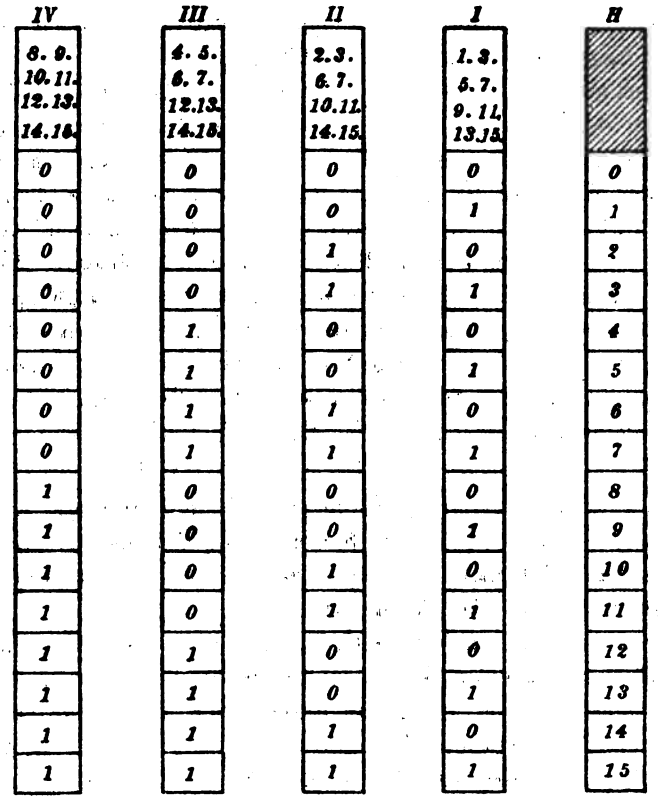


Fig. 2.

Zur Begründung hierfür ist außer den obigen Angaben über die Einrichtung der Karten noch die weitere zu machen, daß auf jeder der Karten gerade die Zahlen „oben" angegeben sind, zu denen auf der betreffenden Karte ein □ ge-

hört. Wenn also der Zahl 8 das Bild □ — □ □ entspricht, so steht die „8" oben auf den Karten IV, II und I, dagegen nicht auf Karte III. War also 8 die gedachte Zahl, so bleiben somit die Karten IV, II, I in ihrer Lage; III wird aber umgekehrt und zwar tritt dadurch in der Zeile, die der gedachten Zahl 8 entspricht, an Stelle des — jetzt ein □. Diese Zeile weist also jetzt auf allen 4 Karten ein □ auf, d. h. das Bild □ □ □ □, und zwar ist sie, da alle 16 Bilder auch in der neuen Lage der Karten verschieden sein müssen (s. Anm. 1, S. 46), die einzige Zeile dieser Art. Praktisch bedeutet dies, daß der Haufen der 4 Karten an dieser Stelle und nur an dieser durchsichtig ist, eben infolge der 4 Löcher □, so daß man also von der Karte *H* die gedachte Zahl 8 und nur diese erblickt.

Natürlich hätten wir statt unserer aus den Zeichen □ und — zusammengesetzten Bilder auch die dyadischen Bilder wählen können. Fig. 2 veranschaulicht dies mit den 16 Zahlen 0, 1 ... 15 auf der Karte *H*: jeder Zahl entspricht in der betreffenden Zeile das von den Nebenkarten gebildete dyadische Zahlenbild; auch jetzt haben zwei „komplementäre" Zahlen „komplementäre" Bilder; so ist z. B. $5 = 0101$ und

$$10 = 1010.$$

Auch hier stehen auf den Nebenkarten oben alle die Zahlen von *H*, zu denen auf der betreffenden Nebenkarte eine 1 gehört; die Nebenkarten weisen daher hier genau dieselben Zahlen auf wie die Nebenkarten in Abschnitt II (S. 39). Denken wir uns nun die Felder, in die bei dieser Einrichtung eine 1 gekommen ist, durchlöchert, die mit 0 dagegen nicht, so ist das Spiel fertig, das in dieser Form freilich durchsichtiger und daher für die Zwecke des Spiels wohl weniger Reiz auszuüben geeignet ist als in der oben beschriebenen Ausführung.

IV. Die Gitterschrift.

In der früheren Literatur stößt man häufig auf allerhand Vorschriften über Steganographie oder Geheimschrift. Eine ihrer Formen, für deren Entzifferung zudem u. a. auch die Dyadik

verwandt wird, ist die sogenannte Gitterschrift. Der Schreibende schickt seine geheime Botschaft an den Empfänger etwa in der Form des Quadrats der Fig. 3.

Die Reihenfolge zu ermitteln, in der die 64 Buchstaben zu lesen sind, wird der Empfänger oder irgend ein Unberufener bei der ungeheuer großen Zahl von Permutationen schwerlich in der Lage sein. Das Hilfsmittel, durch das der Empfänger und nur er allein in die Lage versetzt werden soll, die Geheimschrift zu lesen, ist ein sogenanntes Gitter, wie es

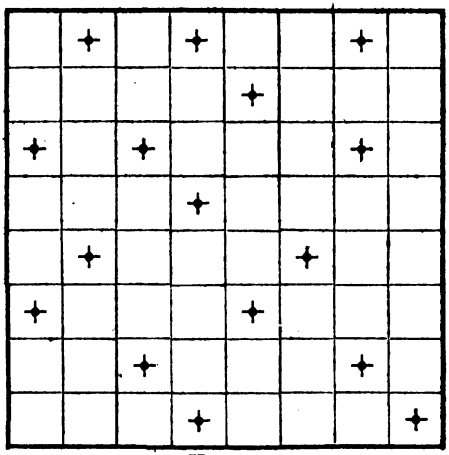
g	*e*	*w*	*i*	*l*	*a*	*n*	*l*
l	*i*	*e*	*h*	*g*	*c*	*r*	*r*
ü	*s*	*n*	*h*	*h*	*c*	*s*	*e*
h	*e*	*n*	*t*	*e*	*b*	*e*	*i*
t	*i*	*n*	*u*	*r*	*g*	*l*	*n*
e	*f*	*s*	*i*	*r*	*o*	*e*	*l*
r	*c*	*z*	*g*	*n*	*h*	*u*	*e*
n	*s*	*m*	*f*	*u*	*ö*	*m*	*a*

Fig. 3.

Fig. 4 darstellt. In diesem sind die mit + bezeichneten Felder durchlöchert, also durchsichtig, so daß, wenn man das Gitter auf das kongruent vorausgesetzte Quadrat der Schreibtafel Fig. 3 legt, man von oben nach unten und von links nach rechts liest: ein günstiger zufa. Nun dreht man das Gitter um 90° im umgekehrten Uhrzeigersinne und liest: ll erhebt unsern mö; nach abermaligen Drehungen um 90° liest man: glichen erfolg zum wahrscheinlichen. Damit sind — bei 16 Löchern — alle $4 \cdot 16 = 64$ Buchstaben der Schreibtafel erschöpft. Jedes Feld der Schreibtafel war nur in einer Lage des Gitters sichtbar; denn dieses ist so eingerichtet, daß nie eins seiner 16 durchlöcherten Felder bei den Drehungen an

eine Stelle der Schreibtafel kommt, an der vorher schon ein durchlöchertes Feld war. Dies läßt sich sehr leicht erreichen,

Oben.



Unten.

Fig. 4.

wenn man das Gitter etwa herstellt unter Benutzung der Fig. 5, in der alle Felder, die bei Drehungen die gleichen

1	2	3	4	13	9	5	1
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

Fig. 5.

Plätze einnehmen, mit gleichen Zahlen bezeichnet sind, und wenn man dann nur darauf achtet, daß nie zwei Felder gleicher Zahl durchlöchert werden, vielmehr von jeder Zahlart gerade eins, was für Fig. 4 zutrifft.

Soll die Verheimlichung der Schrift wirksam sein, so darf natürlich das Gitter weder mit der Schrift übersandt werden noch darf es immer dasselbe sein, vielmehr wird mit Recht empfohlen, es so einzurichten, daß der Empfänger sich erst das jedesmal gültige Gitter herstellen muß. Es muß ihm alsdann eine **Gitterformel** mitgeteilt werden und hierfür werden verschiedene Anweisungen gegeben[1]), u. a. die folgende, die uns wegen der dabei vorkommenden Verwendung der **Dyadik** interessiert und die uns überhaupt nur veranlaßt, hier von Gitterschrift zu sprechen: Der Sendende teilt dem Empfänger zugleich mit der Schreibtafel folgende Reihe von Zahlen mit:

82
8
162
16
68
136
34
17.

Diese Mitteilung genügt zur Charakterisierung des Gitters, wenn vorher ein für alle Male vereinbart ist, daß die Zahlen in die dyadische Schreibweise zu übertragen sind, also so:

---

1) In der im liter. Index aufgeführten „Combinationslehre" von J. F. Lorenz, der ich hier neben dem gleichfalls im Index aufgeführten Buche von L. Bleibtreu (Ausg. 1824, p. 259—270) gefolgt bin, finden sich hierfür außer der obigen noch 3 andere, hier nicht interessierende Vorschriften (l. c. p. 486).

$$
\begin{aligned}
82 &= 1010010\\
8 &= 1000\\
162 &= 10100010\\
16 &= 10000\\
68 &= 1000100\\
136 &= 10001000\\
34 &= 100010\\
17 &= 10001,
\end{aligned}
$$

und daß jede 1 ein durchlöchertes, jede 0 ein geschlossenes Feld bedeutet. Die dyadischen Zahlen geben dann für die einzelnen Zeilen des Gitters, Zahlen wie Zeilen von oben nach unten gerechnet, die Durchlöcherungen an, wenn man vor die Zahlen links gegebenenfalls überall so viele Nullen setzt, daß sie alle achtstellig werden. Die vorletzte Zahl 34 = 00100010 besagt dann also z. B., daß in der zweituntersten Zeile das 3. und 7. Feld, von links gerechnet, zu durchlöchern sind.

V. Der „Turm von Hanoï".

Das Spiel ist von Édouard Lucas[1]) unter dem Pseudonym eines Mandarinen Claus[2]) erfunden und gemäß einer beigegebenen märchenhaften Erzählung von dem indischen Ursprung des Spiels als „La Tour d' Hanoï" bezeichnet worden. Soviel mir bekannt ist, erfolgte irgend eine Publikation Lucas' über das Spiel jedoch vor dem Jahre 1889[3]) nicht. Das Spiel

---

1) Siehe Lucas, „Récréat.", III, p. 59 und Zeitschrift „Le Cosmos", 39ème année, t. XV (nouvelle série), 1890, p. 157 und 158. — Lucas wird durch das im nächsten Abschnitt (VI, S. 61 ff.) zu besprechende Spiel (Baguenaudier) zu dieser Erfindung geführt sein.

2) Anagramm von Lucas.

3) Siehe die dritte der im liter. Index verzeichneten, mir übrigens nicht zugänglichen Lucasschen Broschüren „Jeux scientifiques" . . .. (1889). Auch in einer deutschen, im Jahre 1889, jedoch ohne Jahresangabe erschienenen Schrift „Der Zauberer im Familienkreise" (s. liter. Index) finde ich unser Spiel beispielsweise bereits (I. Bändchen, p. 28—30)

wurde jedoch schon vorher — spätestens im Jahre 1884 — von der deutschen Industrie in den Handel gebracht, wie in einer Abhandlung von P. H. Schoute, der frühesten mir überhaupt über diesen Gegenstand bekannt gewordenen, gesagt ist[1]), wo zugleich bereits eine eingehende Theorie unseres Spiels gegeben wird.

Das Spiel besteht aus einem Brett mit 3 Pflöcken *A*, *B*, *C*; auf einem der Pflöcke (*A*), dem „Ausgangspflock", befindet sich eine Anzahl in der Mitte durchbohrter Scheiben pyramidenartig übereinander, wie Fig. 6 es zeigt.[2]) **Das Spiel besteht darin, die Scheiben alle auf einen der beiden anderen Pflöcke, den „Endpflock" (*C*), zu bringen, wenn man zurzeit immer**

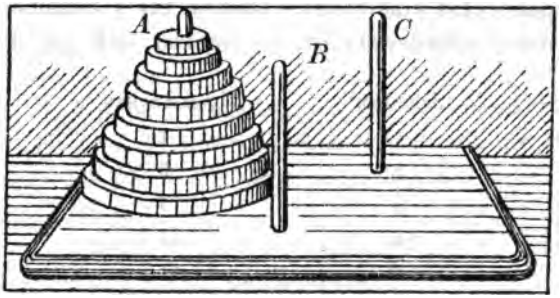


Fig. 6.

nur eine Scheibe umsetzen und stets bei allen Umsetzungen nur die kleinere Scheibe auf die größere, niemals umgekehrt, setzen darf. Der Pflock *B* spielt dabei natürlich die Rolle einer Zwischenstation: „Übergangspflock". Das Ziel soll, wie keiner Erwähnung bedarf, durch möglichst wenig Umsetzungen erreicht, unnötige Umsetzungen also vermieden werden.

---

und es findet sich auch wohl schon in der ersten Ausgabe dieser als 2. Aufl. bezeichneten Schrift.

1) P. H. Schoute, Artikelserie „Wiskundige Verpoozingen" in der holländischen Zeitschrift „Eigen Haard" 1884, p. 274. Siehe a. Lucas, „Récr.", l. c. p. 58/59.

2) Das Spiel kann von den Züllchower Anstalten in Züllchow bei Stettin bezogen werden („Die Ringe der Braminen").

Man erkennt, daß die Anzahl der erforderlichen Umsetzungen mit der Zahl der vorhandenen Scheiben wächst. Ist die Aufgabe für 8 Scheiben etwa zu lösen, so müssen, damit die unterste Scheibe auf den Endpflock C gesetzt werden kann, zunächst die oberen 7 Scheiben alle auf den Übergangspflock B gebracht, mithin die Aufgabe des Spiels erst für 7 Scheiben gelöst werden. Darauf kann dann die unterste Scheibe auf den Endpflock gebracht werden und nun die anderen 7 sukzessive darüber, was wieder ebensoviele Umsetzungen erfordert, als wenn die Aufgabe des Spiels für 7 Scheiben vollständig zu lösen wäre. Man sieht so, daß, wenn die Zahl der Scheiben um 1 wächst, die Zahl der erforderlichen Umsetzungen auf das Doppelte plus eins steigt. Da nun für 1 Scheibe natürlich 1 Umsetzung erforderlich ist, so ergeben sich leicht folgende Zahlen:

Scheiben	Umsetzungen
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
n	$2^n - 1$.

Bei 64 Scheiben z. B. würden also so viele Umsetzungen nötig sein, wie in dem oben (S. 37) besprochenen Falle Weizenkörner auf das Schachbrett gelegt werden sollten.

Wir denken uns nun die Scheiben so wie sie in Fig. 6 auf A sitzen, von oben nach unten mit $1, 2, 3 \ldots n$ bezeichnet und wollen das Verfahren, die Scheiben $1, 2, 3 \ldots n$ von A nach C der Spielregel gemäß zu bringen, symbolisch mit $U_n(A, C)$ bezeichnen. Entsprechend wird beispielsweise $U_i(B, C)$ das Verfahren, die Scheiben $1, 2, 3 \ldots i$ von B nach C zu bringen, bedeuten, und $U_1(A, B)$ die Umsetzung der Scheibe 1 von A nach B. Handelt es sich um die Umsetzung gleichfalls nur einer Scheibe, jedoch einer anderen als 1, von einem

Pflock zum andern, etwa um die der Scheibe k von B nach C ($k > 1$), so wollen wir dies durch $U^{(k)}(B, C)$ kennzeichnen. Mit Hilfe dieser symbolischen Schreibweise stellt sich nun das oben für den Fall $n = 8$ beschriebene Verfahren, die Aufgabe des Spiels zu lösen, offenbar so dar:

$$U_n(A, C) = U_{n-1}(A, B) + U^{(n)}(A, C) + U_{n-1}(B, C).$$

Diese symbolische Schreibweise erleichtert uns eine Reihe von Schlüssen, die wir jetzt ziehen wollen, um in das Wesen des Spiels noch besser einzudringen.[1]) An dem Verfahren $U_{n-1}(A, B)$ sind die Scheiben $1, 2, 3 \ldots (n-1)$ beteiligt und ebenso an $U_{n-1}(B, C)$, während das mittlere Glied der rechten Seite unserer symbolischen Gleichung mit keiner der Scheiben $1, 2, 3 \ldots (n-1)$ irgendetwas zu tun hat. Der Unterschied zwischen $U_{n-1}(A, B)$ und $U_{n-1}(B, C)$ besteht nun lediglich in den verschiedenen, den Pflöcken zugeteilten Rollen; dagegen ist z. B. die Zahl der Umsetzungen, die irgendeine Scheibe bei $U_{n-1}(A, B)$ erfährt, natürlich ebenso groß wie bei $U_{n-1}(B, C)$ für dieselbe Scheibe. Wir sehen also, daß, wenn die betreffende Scheibe — beispielsweise s — k Umsetzungen bei $U_{n-1}(A, B)$ erfährt, sie bei $U_{n-1}(B, C)$ ebenfalls k, also bei $U_n(A, C)$ deren $2k$ erfährt. Wir sagen demnach:

Satz 1: *Erfährt eine bestimmte Scheibe bei einem Spiel von m Scheiben im ganzen k Umsetzungen, so erfährt sie bei einem Spiel von $m + 1$ Scheiben $2k$ Umsetzungen.*

Bei 3 Scheiben erleidet nun, wie leicht zu sehen:

Scheibe	1	. . . .	4 Ums.
-	2	. . . .	2 -
-	3	. . . .	1 -
		zus.	7 Ums. (vgl. die Tabelle, S. 54);

hieraus folgt dann nach Satz 1 sofort:

---

1) Die in den folgenden „Sätzen" angegebenen Tatsachen finden sich im wesentlichen alle schon bei Schoute (1884), l. c. p. 275 und 286. Vgl. aber a. Anm. 2, S. 59.

4 Scheiben		
Scheibe	1 8	Ums.
-	2 4	-
-	3 2	-
-	4 1	-
	zus. 15	Ums.

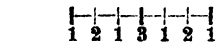
Bei 5 Scheiben sind die entsprechenden Zahlen 16, 8, 4, 2, 1, also stets die Potenzen von 2, und da

$$1 + 2 + 4 \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

so kommen wir auch auf diesem Wege zu dem allgemeinen Gliede unserer obigen Tabelle, sehen jedoch jetzt zugleich, wie sich die insgesamt $2^n - 1$ Umsetzungen auf die einzelnen Scheiben verteilen. Wir wollen dies noch mehr veranschaulichen: Bei 3 Scheiben setzt sich das Verfahren, d. h. $U_3(A, C)$, aus folgenden Umsetzungen zusammen:

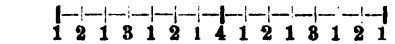
Scheibe	1	von	A	nach	C,
-	2	-	A	-	B,
-	1	-	C	-	B,
-	3	-	A	-	C,
-	1	-	B	-	A,
-	2	-	B	-	C,
-	1	-	A	-	C.

Die Reihenfolge, in der die einzelnen Scheiben hierbei umgesetzt werden, wollen wir graphisch darstellen, und zwar so:



Die Stelle 3 ist die Mitte der Linie und deren beide Hälften sind völlig symmetrisch, was übrigens, wie aus unserer obigen symbolischen Gleichung folgt, auch allgemein für jede Scheibenzahl gilt. Ferner sehen wir — zunächst nur für unseren Spezialfall —, daß jeder zweite Teilstrich die 1 aufweist, was wir, wenn wir den Abstand zwischen 2 Teilstrichen der Bequemlichkeit halber „Millimeter“ nennen, auch so ausdrücken: Alle 2 mm weist die Strecke die „1“ auf. — Dagegen weist sie

die „2“ nur im Abstande von 4 mm auf. Es entsteht die Frage, wie sich bei größerer Scheibenzahl diese Verhältnisse gestalten. Für 4 Scheiben erhalten wir das entsprechende graphische Bild auf Grund unserer symbolischen Gleichung sehr leicht, indem wir das Bild für 3 Scheiben zweimal zeichnen und zwischen die beiden Strecken nur einen Teilpunkt mit der Bezeichnung 4 setzen. Wir erhalten so:



Auch jetzt haben wir die 1 alle 2 mm, die 2 alle 4 mm, die 3 alle 8 mm. Allgemein, behaupten wir, wird folgendes gelten:

Satz 2: *Bei n Scheiben sind zur Lösung der Aufgabe des Spiels im ganzen $2^n - 1$ Umsetzungen erforderlich. Diese verteilen sich auf die einzelnen Scheiben folgendermaßen: Scheibe* 1 *erleidet die erste Umsetzung und, von da ab gerechnet, jede zweite, im ganzen deren 2^{n-1}; Scheibe* 2 *kommt zum ersten Male bei der zweiten Umsetzung an die Reihe und erleidet von da ab jede vierte Umsetzung, im ganzen deren 2^{n-2}; Scheibe k kommt zunächst als 2^{k-1}te an die Reihe, erleidet von da ab jede 2^kte Umsetzung und im ganzen deren 2^{n-k}.*

Für $n = 3, 4$ galten unsere Behauptungen, und wir können die allgemeine Richtigkeit durch den Schluß von m auf $m + 1$ leicht beweisen. Angenommen, unser Satz gelte noch für m Scheiben, so haben wir für diesen Fall das graphische Bild:

Fig. 7.

Auf Grund unserer symbolischen Gleichung bekommen wir dann für den Fall der $m + 1$ Scheiben das Bild:

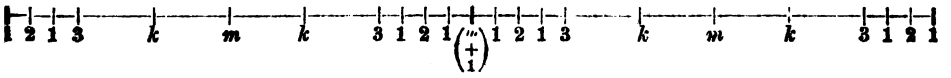


Fig. 8.

Man sieht sofort, daß auch jetzt die Teilpunkte 1 überall im Abstand 2 mm auftreten, die Teilpunkte 2 im Abstand 4 mm und daß entsprechendes auch für irgendeine Zahl k gilt. Denn

in Fig. 7 waren die k um je 2^k mm voneinander entfernt und das letzte k stand vom Ende der Linie ab um $(2^{k-1}-1)$ mm; also ist in Fig. 8 der nächste Teilstrich k links von der (durch Teilstrich $m+1$ gekennzeichneten) Mitte um 2^{k-1} mm entfernt und die gleiche Entfernung von der Mitte hat der nächste Teilstrich k rechts; diese beiden sind also voneinander 2^k mm entfernt. Damit ist Satz 2, der übrigens den Satz 1 in sich schließt, bewiesen.

Nachdem Anzahl und Reihenfolge der Umsetzungen der einzelnen Scheiben ohne Rücksicht auf die Pflöcke bestimmt sind, erheben wir die Frage: welche Pflöcke werden bei den verschiedenen Umsetzungen besetzt resp. welche Gesetze gelten für die Wanderungen einer Scheibe von Pflock zu Pflock? Bei 3 Scheiben macht Scheibe 1 folgende Wanderung (s. S. 56):

$$A - C - B - A - C;$$

sie dreht sich also stets in demselben Drehungssinne und zwar, wenn wir unsere Anordnung der Fig. 6 zugrunde legen, in der Richtung des Uhrzeigers. — Wie wird sich Scheibe 1 in einem Spiel von 4 Scheiben verhalten? Es ist

$$U_4(A, C) = U_3(A, B) + U^{(4)}(A, C) + U_3(B, C).$$

Das Glied $U^{(4)}(A, C)$ kommt für unsere Frage nicht in Betracht. Bei $U_3(A, B)$ dreht sich die Scheibe 1 offenbar entgegengesetzt als in dem vorher betrachteten Fall $U_3(A, C)$; denn Übergangs- und Endpflock haben jetzt ihre Rollen oder anders gesprochen: B und C haben ihre Stellen vertauscht; die Wanderung von Scheibe 1 bei $U_3(A, B)$ ist also.

$$A - B - C - A - B.$$

Ebenso ist bei $U_3(B, C)$ die Drehungsrichtung die entgegengesetzte als bei $U_3(A, C)$. Sowohl bei $U_3(A, B)$ wie bei $U_3(B,C)$, d.h. bei $U_4(A,C)$ überhaupt, bewegt sich also Scheibe 1 stets in derselben Drehungsrichtung und zwar im umgekehrten Uhrzeigersinne. Ebenso wie beim Übergange von 3 zu 4 Scheiben liegen die Verhältnisse offenbar beim Übergange von n zu $n+1$ Scheiben, und wir sehen also, daß, wenn die Scheibe 1

sich bei $U_n(A, C)$ stets in demselben Sinne dreht, sie sich auch bei $U_{n+1}(A, C)$ stets in einem festen Drehungssinne bewegt, jedoch in dem entgegengesetzten als bei $U_n(A, C)$. Die Voraussetzung — der feste Drehungssinn — ist nun für $n = 3$ erfüllt, und wir haben damit also bewiesen:

Satz 3: *Die oberste Scheibe dreht sich bei dem Verfahren der Lösung der Aufgabe stets in einem festen Drehungssinne, und zwar bei ungerader Scheibenzahl in der Richtung Ausgangspflock-Endpflock-Übergangspflock*[1]*), bei gerader Scheibenzahl in entgegengesetzter Richtung (Ausgangspflock-Übergangspflock-Endpflock).*

Aus diesem Satz 3 fließt sofort als Spezialfall:

Satz 4: *Bei ungerader Scheibenzahl beginnt das Spiel damit, daß die kleinste Scheibe auf den Endpflock gesetzt wird, bei gerader Scheibenzahl dagegen mit Umsetzung dieser Scheibe auf den Übergangspflock.*

Dieser Satz zusammen mit den Tatsachen (Satz 3 resp. 2), daß die kleinste Scheibe sich in konstanter Richtung dreht und daß jede zweite Umsetzung mit ihr vorgenommen wird[2]), gestattet eine mechanische Handhabung des Spiels.

Es entsteht die Frage, ob auch die übrigen Scheiben jede für sich einen festen Drehungssinn bei ihren Wanderungen beobachten und gegebenenfalls welchen? Zu dem Zweck stellen wir zunächst aus unserer symbolischen Gleichung fest, daß die vorletzte Scheibe $(n - 1)$ sich von A nach B und von B nach C (also: Ausgangspflock — Übergangspflock — Endflock) bewegt, die letzte (n) dagegen von A nach C, d. h. entgegengesetzt der vorletzten. Wir heben dies hervor als

Vorbemerkung: Die letzte Scheibe bewegt sich in entgegengesetzter Richtung zu der vorletzten.

---

1) Die Unterscheidung der Richtungen nach dem Uhrzeiger wählten wir oben nur aus Gründen der Bequemlichkeit; bei endgültiger Formulierung unseres Resultats ist es jedoch geboten, von der zufälligen Anordnung der Pflöcke in Fig. 6 zu abstrahieren.

2) Auf diese Momente und ihre praktische Bedeutung machte zuerst, wie Ed. Lucas angibt, dessen Neffe Raoul Olive, damals Schüler eines Lyceums, aufmerksam (Lucas, „Récr." III, p. 58).

In unserer symbolischen Gleichung

$$U_n(A, C) = U_{n-1}(A, B) + U^{(n)}(A, C) + U_{n-1}(B, C)$$

können wir nun die beiden Ausdrücke U_{n-1} durch abermalige Anwendung dieser Formel ersetzen durch Ausdrücke U_{n-2} einerseits und $U^{(n-1)}$ andererseits, dann wieder die U_{n-2} durch Ausdrücke U_{n-3} und $U^{(n-2)}$ usw. Schließlich erhalten wir $U_n(A, C)$ dargestellt als eine Summe, deren Summanden bestehen aus Ausdrücken U_2 und $U^{(3)}$, $U^{(4)}$, ... $U^{(n)}$. Von diesen berühren die Ausdrücke $U^{(3)}$, $U^{(4)}$, ... $U^{(n)}$ die Scheiben 1 und 2 nicht; wollen wir die Wanderungen dieser beiden Scheiben verfolgen, so kommt also nur die Summe der Ausdrücke U_2 in Betracht. Bei jedem einzelnen Verfahren U_2 handelt es sich nun allein um die Scheiben 1 und 2, und zwar bewegt sich innerhalb dieses einen Verfahrens nach unserer „Vorbemerkung" die Scheibe 1 als die jetzt vorletzte in entgegengesetzter Richtung zu der Scheibe 2 als der letzten. Nun ist aber durch das ganze Verfahren $U_n(A, C)$ hindurch, also auch durch die Gesamtheit der U_2 hindurch, der Drehungssinn der Scheibe 1 konstant (Satz 3), also ist auch der Drehungssinn von Scheibe 2 konstant, wenn auch entgegengesetzt dem von 1. — So können wir nun fortfahren; denn ebenso wie durch die U_2, könnten wir $U_n(A, C)$ durch Ausdrücke U_3 und $U^{(4)}$, $U^{(5)}$, ... $U^{(n)}$ darstellen — es ist diese Darstellung ja oben bereits als vorhanden angenommen, da sie die Vorstufe für die Darstellung durch die U_2 usw. wäre —, und wir würden aus dieser Darstellung schließen, daß Scheibe 3 einen konstanten Drehungssinn hat, der dem von 2 entgegengesetzt, also gleich dem von 1 ist. Offenbar geht dies auch weiter so fort und, wenn wir uns die Scheiben abwechselnd schwarz und weiß angestrichen denken und zwar die unterste schwarz, so können wir sagen:

Satz 5: *Jede Scheibe dreht sich während des ganzen Verfahrens zur Lösung der Aufgabe des Spiels in einem konstanten Drehungssinne und zwar die schwarzen Scheiben in der Richtung Ausgangspflock-Endpflock-Übergangspflock, die weißen in der (entgegengesetzten) Richtung Ausgangspflock-Übergangspflock-Endpflock.*

Man kann die Aufgabe des Spiels noch erschweren, indem man nicht von der sozusagen „normalen" Anfangsstellung der Fig. 6, sondern von einer beliebigen ausgeht. Lucas, der hierauf aufmerksam macht („Récr.", III, p. 58), hat auch eine Vermehrung der Pflöcke erwogen, wodurch man bei entsprechender Änderung der Spielregel zu Spieltheorien kommen würde, für die andere Zahlensysteme resp. andere Grundzahlen eine ähnliche Rolle spielen würden wie in der Theorie unseres Spiels das dyadische System resp. die Reihe der Potenzen der 2. Ich bin diesen Fragen nicht näher getreten.

VI. Der Baguenaudier.

Hoc instrumento ludus excogitatus mirae subtilitatis.
CARDAN.
De subtilitate liber XV.

Plurimae speculationes Mathematicae ad rem Quaestuariam non spectant, sed sua se Subtilitate commendant.
WALLIS.
Opera math. 1693. II, p. 472.

Das im folgenden behandelte Spiel tritt, wenn seine Erfindung auch schon weiter zurückliegen mag, in der Literatur wohl zuerst bei Cardan[1]) (1501—1576) auf, der das Verfahren, jedoch ohne alle mathematische Begründung oder sonstige mathematische Betrachtungen, kurz beschreibt und das Spielzeug selbst auch nur mangelhaft abbildet; das Spiel begegnet uns dann wieder in der „Algebra" des berühmten englischen Mathematikers Wallis[2]) (1616—1703), der bereits die Anzahl der für das Spielverfahren erforderlichen Operationen bestimmt. In der späteren Literatur ist es mir dann aufgestoßen in einem italienischen Werke[3]) von 1747 und in Ozanams „Récréations"[4]), an beiden Stellen jedoch nur abgebildet ohne begleitenden Text. Eine genaue Beschreibung des Spielverfahrens für einen Spezial-

1) Cardan, De subtilitate liber XV („De inutilibus subtilitatibus"), Nürnberg 1550, p. 294; Basel 1553, p. 932 = Hieronymi Cardani Opera, Lugduni 1663, t. III, p. 587.

2) Wallis, Opera mathem., Oxoniae 1693. II, chap. 111, p. 472—478: „De complicatis annulis".

3) Von Alberti (s. liter. Index), Taf. XIII (zwischen p. 214 u. 215).

4) Ozanam, „Récréations mathém. et phys.", herausg. von Montucla, Paris 1750, t. IV, Fig. 47. In anderen Ausgaben, z. B. der von 1790, fehlt auch diese Figur.

fall, wie auch Beschreibung des inversen Verfahrens für denselben Fall, und Bestimmung der Anzahlen der erforderlichen Operationen gibt sodann die „Encyclopédie méthodique“.[1]) In der deutschen Literatur weiß ich es erst in Wieglebs und Rosenthals großem Werk über „die natürliche Magie“ nachzuweisen, wo bereits die grundlegenden Bestandteile der Theorie des Spiels richtig erkannt und recht gut angegeben sind.[2]) In neuerer Zeit hat dann Louis Gros, Appellationsgerichtsrat in Lyon, eine Broschüre über das Spiel herausgegeben[3]), in der er eine erschöpfende, auf die Dyadik[4]) begründete mathematische Theorie desselben entwickelt.

In Frankreich nennt man unser Spiel „Baguenaudier“.[5]) Ein einheitlicher deutscher Name scheint für das in Deutschland

1) „Encyclopédie méthodique“: „Dictionnaire des jeux familiers“, Paris 1797, p. 19—20.

2) Siehe Joh. Chr. Wiegleb, „Die natürliche Magie“ (s. im liter. Index unter „Martius“), Bd. II, 1786, p. 223—231 und — für die allgemeine Theorie — Bd. IV, herausg. von G. E. Rosenthal, 1790, p. 226 bis 227. Ein gleichzeitiger anderer Autor, der in Berlin lebende P. F. Catel erwähnte das Spiel in seinem im liter. Index aufgeführten Buche von 1790 (p. 15) und offerierte gleichzeitig das Spielzeug selbst zum Verkauf. — Ältere Ausgaben des Martiusschen Werkes habe ich übrigens nicht eingesehen; daß in den späteren Ausgaben, z. B. der im liter. Index gesondert aufgeführten von J. H. M. von Poppe (1839; Cap. X, 1, p. 120 bis 129), unser sonst in der deutschen Literatur des 19. Jahrhunderts recht selten vorkommendes Spiel behandelt ist, bedarf keiner Erwähnung. — Beachte auch die Erwähnung in dem unten (S. 63, Anm. 1) zitierten Adelungschen Wörterbuch von 1796.

3) „Théorie du baguenodier“ par un clerc de notaire Lyonnais, Lyon 1872, Verlag v. Aimé Vingtrinier. Vgl. auch Lucas, „Récr. mathém.“, I, p. 168 ff.

4) Merkwürdigerweise führt schon Rosenthal in dem oben (Anm. 2) zitierten Artikel (l. c. p. 227) die Dyadik in die Betrachtung ein, jedoch ohne den inneren Zusammenhang mit der Theorie des Spiels zu erkennen resp. darzutun. Sollte vielleicht doch schon eine ältere Schrift — vor Gros — die dyadische Theorie des Spiels geben?

5) Gros, der die etymologische Erklärung des Namens in den Worten bague und noeud (nodus) findet, schreibt dementsprechend baguenodier (s. Lucas, „Récr. mathém.“, I, p. 170—172), während Littré (Dictionnaire de la langue française, 1863) und das Dictionnaire de l'aca-

auch weniger bekannte (vgl. Anm. 2, vorige S.) Spiel nicht zu existieren, vielmehr sind mir folgende verschiedene Bezeichnungen bekannt geworden: „Die Zauberkette oder das magische Ringspiel" (Wiegleb l. c.), „der Nürnberger Tand" (Catel l. c.), „Grillenspiel"[1]), „Zankeisen".[2]) Wie O. J. Broch, Professor der Mathematik in Christiania und zeitweilig Marine- und Postminister in Norwegen, der langjährige Direktor des Bureau international des poids et des mesures in Sèvres bei Paris, an Edouard Lucas erzählt hat[3]), sollte unser Spielzeug von Landbewohnern in Norwegen zum Verschließen ihrer Koffer und Truhen gebraucht werden, doch ist diese Angabe sicher irrtümlich.[4])

Fig. 9 zeigt uns eine an einem Griff angebrachte Spange, auf der 5 gleich große Ringe aus Metall sitzen; jeder derselben ist durch einen an ihm befestigten Faden, der durch das Innere des nächsten Ringes und zwischen den beiden

---

démie francaise (1884) baguen*au*dier vorschreiben. Der Name „Baguenaudier" bezeichnet übrigens sonst auch einen Gartenzierstrauch, den gemeinen Blasenstrauch (Colutea arborescens L.).

1) Johann Christoph Adelung, „Grammatisch-kritisches Wörterbuch der Hochdeutschen Mundart", 2. Th., Leipzig 1796, col. 803, wo der Name „Grillenspiel" nicht nur als der des — in Kap. VIII unseres Buches behandelten — Solitärspiels angegeben wird, sondern zweitens auch als der „eines Spiels mit Ringen auf einem gabelförmigen Drahte, welche nach gewissen Regeln abgespielt werden müssen"; ebenso — vermutlich nach dem ersten — Joachim Heinrich Campe, „Wörterbuch der Deutschen Sprache", 2. Th., Braunschweig 1808, p. 456.

2) Diesen Namen teilte mir Herr Regierungsrat v. Grolman in Gießen unter freundlicher Vorlegung von zwei aus dem Nachlaß seines Großvaters (F. M. Hessemer, Professor am Städelschen Kunstinstitut Frankfurt a. M., † 1860) stammenden Exemplaren (von 7 resp. 13 Ringen) als denjenigen mit, unter dem ihm von jener Seite her das Spielzeug bekannt geworden ist.

3) Siehe Lucas, „Récréat. math.", t. I, p. 165.

4) Herr Dr. Yngvar Nielsen, Professor der Ethnographie in Christiania, teilte mir auf meine Anfrage gütigst mit (Brief vom 7. Juli 1901), daß ein solches Instrument dort weder im ethnographischen Museum noch in dem für nordische Altertümer sich vorfinde und auch durch besondere Nachfragen, welche die Direktion des letztgenannten Museums anstellen ließ, sich nicht habe nachweisen lassen.

Bügeln der Spange hindurchgeht, mit einer kleinen Stange *a* fest verbunden.[1]) Die Ringe seien im folgenden stets, wie in Fig. 9, als „erster", „zweiter" etc. unterschieden und die bei dieser Numerierung früher als ein anderer Ring kommenden kurz als die „vorhergehenden", im umgekehrten Fall als die „nachfolgenden" bezeichnet. **Das Spiel besteht nun darin, die Spange von dem System der Ringe zu trennen.** Der Anfänger versucht die Lösung gewöhnlich in der Weise, daß er, den Griff in die linke Hand nehmend, die Ringe nach rechts bis über das Ende der Spange zieht und nun — irrtümlicherweise — die Ringe über einen der beiden Bügel der Spange wirft, muß dann aber erkennen, daß dies zur Lösung der Aufgabe nicht nur nichts beiträgt, vielmehr nur eine Verwirrung der

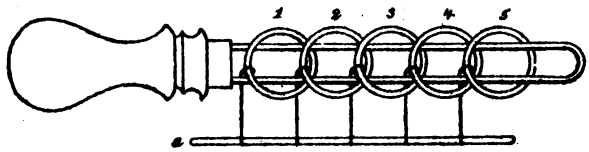


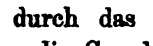
Fig. 9.

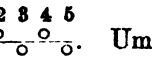
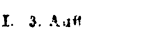
Fäden herbeiführt. Man sieht in der Tat sehr leicht, daß man die einzelnen Ringe zwar nach rechts von der Spange herunter zu ziehen haben wird, daß sie dann jedoch nicht auf die eine Seite der Spange, sondern zwischen den beiden Bügeln der Spange hindurch nach unten geworfen werden müssen, und es entsteht jetzt nur die Frage, in welcher Reihenfolge diese Manipulationen mit den verschiedenen Ringen vorzunehmen sind, um auf die schnellste Art eine Trennung von Spange und Ringen zu erzielen. In der ursprünglichen Stellung (s. Fig. 9) können nur die Ringe 4 und 5 nach unten gelangen — ohne daß einer der betreffenden Fäden über einen Bügel der Spange greift, was natürlich zu vermeiden ist —

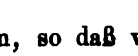
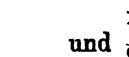
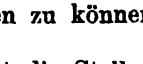
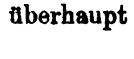
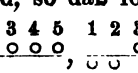
1) Das Spiel kann von den Züllchower Anstalten in Züllchow bei Stettin bezogen werden („Nürnberger Zankeisen", Nr. 842/4 des Preisverzeichnisses 1914/15).

und zwar 5 in der bereits angegebenen Weise und 4, indem man 4 und 5 nach rechts über die Spange hinausführt und dann 4 zwischen den Bügeln hindurch nach unten wirft, 5 dagegen wieder auf die Spange setzt oder gleichzeitig mit 4 nach unten wirft. Bezeichnen wir nun das Lostrennen eines Ringes von der Spange kurz als das „Senken" eines Ringes und die umgekehrte Operation als das „Heben", so erkennt man leicht folgendes

Prinzip: *Ein Ring kann nur dann gehoben resp. gesenkt werden, wenn der nachfolgende Ring oben, alle weiteren folgenden Ringe jedoch unten sind; der letzte Ring kann jederzeit gehoben resp. gesenkt werden.*

Hätten wir z. B. die durch das Schema  angedeutete Stellung — in der die Gerade die Spange und die kleinen Kreise oberhalb derselben die auf ihr sitzenden Ringe, die unteren Kreise die gesenkten Ringe bedeuten — auf irgend eine Weise herbeigeführt, so würde der Ring 2 jetzt gehoben, der Ring 3 dagegen nicht gesenkt und 4 nicht gehoben werden können.

Hiernach erkennt man, daß es bei unserer Aufgabe vor allem darauf ankommen wird, den Ring 1 zu senken, und daß, nachdem dies geschehen, dieser Ring völlig aus der Betrachtung ausscheidet und dann nur noch der Fall eines Spiels von 4 Ringen vorliegt. Damit aber 1 gesenkt werden kann, muß 2 oben und müssen 3, 4, 5 unten sein. Es ist also vorher 3 zu senken, und dies erfordert, daß 4 oben und 5 unten ist. Hiernach ergibt sich folgende Disposition: Es ist zunächst 5 zu senken, darauf kann dann auch 3 gesenkt werden, und wir erhalten also die Stellung  . Um nun auch 4 senken zu können, müssen wir 5 wieder heben und können darauf 4 und 5 senken und zwar gleichzeitig, wie schon oben hervorgehoben. Wir erhalten so die Stellung , die eben die Vorbedingung für das Senken von 1 ist. Aus ihr resultiert daher  . Damit scheidet 1 aus der Betrachtung

aus, und damit nun 2 gesenkt werden kann, muß zuvor 3 gehoben werden. Dies bedingt aber, daß 4 oben ist, und dies wieder dasselbe für 5. Wir heben daher zunächst 4 und 5, was bei diesen beiden zugleich geschehen kann, erhalten also . Soll 3 gehoben werden, so muß erst wieder 5 gesenkt werden, so daß wir sukzessive die Stellungen  und  erhalten. Damit nun 2 gesenkt werden kann, muß nicht nur 3 oben, sondern auch 4 und 5 unten sein, und um 4 senken zu können, müssen wir zuvor 5 heben, so daß wir zunächst die Stellung  bekommen. Dies ist aber die Anfangsstellung für ein Spiel mit 4 Ringen, und die weiteren Operationen sind genau dieselben, als ob wir nur 4 Ringe (2, 3, 4, 5) überhaupt hätten. Durch die jetzt zunächst erreichbare Zwischenstellung  gelangen wir zu , womit auch der Ring 2 aus der Betrachtung ausscheidet. Damit nun 3 gesenkt werden kann, muß zuvor 4 gehoben werden, und dies bedingt wieder, daß 5 zuvor resp. gleichzeitig gehoben wird, so daß folgende sukzessive Stellungen notwendig werden:  , , . Heben wir nun noch 5 und senken dann 4 und 5 gleichzeitig, so sind die Ringe von der Spange getrennt, wie verlangt war.

Wenn wir den zurückgelegten Weg noch einmal verfolgen, so finden wir, daß es 16 Schritte waren, die wir machen mußten, um zum Ziel zu gelangen, wobei ein gleichzeitiges Heben resp. Senken der beiden letzten Ringe als *eine* Operation gezählt ist. Die obigen Betrachtungen zeigen, daß dieser Weg auch wirklich der kürzeste ist, und wir werden dies unten auch noch auf andere Weise bestätigt finden.

Soll umgekehrt das durch unser obiges Verfahren von der Spange getrennte System der 5 Ringe wieder auf jene zurückgeführt werden, so haben wir die Reihe der oben passierten Stellungen jetzt in genau umgekehrter Reihenfolge zu durch-

laufen, was natürlich die gleiche Anzahl von Umstellungen wie oben, also 16, erfordert. Es darf nach den vorstehenden Ausführungen dem Leser überlassen bleiben, dies im einzelnen auszuführen und zu begründen.

Das von uns angewandte Verfahren, die Aufgabe des Spiels zu lösen, überträgt sich offenbar ohne weiteres von dem Spezialfall der 5 Ringe auf den von n und würde somit in folgende Etappen zerfallen:

1. Senken des Systems der letzten $n-2$ Ringe $(3, 4, 5, \ldots n)$,
2. Senken des Ringes 1,
3. Heben des Systems der letzten $n-2$ Ringe $(3, 4, 5, \ldots n)$,
4. Senken des Systems der $n-1$ letzten Ringe $(2, 3, 4, 5 \ldots n)$.

Bezeichnet man nun das Senken des Systems der i letzten Ringe, diese alle auf der Spange sitzend gedacht, durch S_i, und das Heben desselben Systems der Ringe, falls diese alle gesenkt sind, durch H_i, so stellt sich unser oben beschriebenes Verfahren symbolisch so dar:

$$S_n = S_{n-2} + S^{(1)} + H_{n-2} + S_{n-1},$$

wo $S^{(1)}$ eine besondere Umstellung, nämlich lediglich das Senken des Ringes 1, bedeutet. Nun erfordert H_{n-2} als das zu S_{n-2} inverse Verfahren genau ebensoviele Umstellungen wie dieses, wie bereits oben gesagt, so daß, wenn wir die Anzahl der Umstellungen, die S_n erfordert, mit u_n bezeichnen, die entsprechende Zahl für S_{n-2}, d. h. also u_{n-2}, zugleich die Anzahl der Umstellungen von H_{n-2} angeben würde. Da $S^{(1)}$ *eine* Umstellung involviert und S_{n-1} nach unserer Bezeichnung deren u_{n-1}, so haben wir also

$$u_n = 2u_{n-2} + 1 + u_{n-1}.$$

Diese Rekursionsformel gestattet uns, für alle verschiedenen Anzahlen von Ringen die Anzahl der erforderlichen Umstellungen zu berechnen und zwar aus den leicht direkt zu findenden Werten von u_n für kleines n (wir fanden ja bereits durch Abzählung: $u_5 = 16$ und implizite bei dieser Abzählung: $u_4 = 7$, $u_3 = 4$, $u_2 = 1$). Man erhält so ohne Mühe folgende Tabelle:

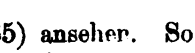
Anz. d. Ringe (n)	Anz. d. Umstell. (u_n)
2	1
3	4
4	7
5	16
6	31
7	64
8	127
9	256
10	511
11	1024
12	2047
20	524287

Bei 65 Ringen würde die Anzahl der erforderlichen Umstellungen bereits eine 20-stellige Zahl[1]) und gerade um 1 größer sein als die Anzahl der Weizenkörner in dem oben (S. 37) besprochenen Falle. Man sieht übrigens leicht, daß die angenommene Anfangsstellung, bei der alle Ringe oben sind, durchaus noch nicht die ungünstigste für die Trennung der Ringe von der Spange ist; vielmehr würde dies für unseren Fall von 5 Ringen die Stellung $\overset{\circ}{\underset{\circ\,\circ\,\circ\,\circ}{1\;2\;3\;4\;5}}$ sein, wo zunächst die 4 letzten Ringe zu heben wären, was, wie wir wissen, ebensoviele Umstellungen erfordert, als wären dieselben ursprünglich oben und erst zu senken, also 7 nach unserer Tabelle; dazu kämen noch die oben angegebenen 16 Umstellungen, so daß es zusammen also 23 wären.

Hatten wir bisher von spezifisch mathematischen Hilfsmitteln keinen Gebrauch gemacht, so wenden wir uns nun zu einer zweiten Behandlung unseres Problems, die von der vor-

---

1) Wir werden weiterhin für die Anzahl der erforderlichen Umstellungen eine direkte Formel herleiten und nehmen das Resultat für $n = 65$ hier vorweg.

stehenden Theorie — abgesehen von der Voraussetzung des „Prinzips“ (S. 65) — unabhängig ist und die von dem Hilfsmittel der Dyadik Gebrauch machen wird. Wir wollen nämlich hinfort die Stellung jedes Ringes durch eine der Ziffern 0 und 1 charakterisieren, so zwar, daß der erste Ring (1) eine 1 erhält, wenn er oben, und eine 0, wenn er unten ist, und jeder folgende, wenn er unten ist, die Ziffer (0 oder 1) des vorhergehenden Ringes bekommt, dagegen die entgegengesetzte Ziffer, wenn er oben ist. Die sich so im ganzen ergebende Zahl, geschrieben mit den Ziffern 0 und 1, wollen wir als eine Zahl des dyadischen Systems (vgl. oben S. 35) ansehen. So ist z. B. die Stellung 

durch die Zahl 11001 völlig charakterisiert (der erste Ring erhält 1, weil er oben ist; der zweite erhält die 1 des vorhergehenden, weil er unten ist; der dritte, oben befindliche, bekommt im Gegensatz zum vorhergehenden 0, während der vierte wieder die Ziffer 0 des vorhergehenden erhält; bei dem letzten tritt schließlich wieder ein Wechsel ein). Wir sahen nun oben, daß alle Umstellungen darauf hinauskommen, daß ein Ring gehoben oder gesenkt wird, wenn der auf ihn folgende oben ist, alle weiteren folgenden aber unten sind („Prinzip“, S. 65). Nehmen wir zunächst an, ein oben befindlicher Ring könne gesenkt werden; dann muß die Stellung entweder durch

a) ... 01000 ...
oder b) ... 10111 ...

charakterisiert sein, wo sich die unterstrichene Zahl auf den betreffenden Ring bezieht und die Zahlen am Ende alle gleich lauten, während die am Anfang belanglos sind. Nach Ausführung der Senkung erhalten wir offenbar eine Stellung, die durch die Zahl

ā) ... 00111 ...
bzw. b̄) ... 11000 ...

— beide wieder mit lauter gleichlautenden Ziffern am Ende — charakterisiert ist. Sehen wir uns die letzteren dyadischen Zahlen im Vergleich zu den vorherigen an, so erkennen wir,

daß das mathematische Äquivalent unserer Umstellung eine Subtraktion resp. Addition von 1 ist, da die Zahl $\bar{a}$ offenbar um 1 kleiner ist als a und $\bar{b}$ um 1 größer als b. Kann dagegen ein Ring gehoben werden, so ist die betreffende Stellung offenbar durch das obige $\bar{a}$ oder $\bar{b}$ charakterisiert und die durch Ausführung der Hebung sich ergebenden Stellungen durch a resp. b. Wir sehen also, daß das Heben wie Senken eines Ringes bei unserer mathematischen Bezeichnungsweise einer Addition oder Subtraktion von je 1 entspricht. Die beiden letzten Ringe nahmen nun aber insofern eine Ausnahmestellung ein, als wir sie beide gleichzeitig heben und senken konnten. Dies bedeutet offenbar: Wir können von einer Zahl, deren letzte Ziffern 101 resp. 010 sind (wenn nämlich die beiden letzten Ringe oben sind), direkt zu einer Zahl, deren letzte Ziffern 111 resp. 000 sind, übergehen, was natürlich einer Addition resp. Subtraktion von je 2 (= 10 in dyadischer Schreibweise) gleichkommt, oder aber (wenn die beiden letzten Ringe unten sind) von einer auf 000 resp. 111 ausgehenden Zahl direkt zu einer auf 010 resp. 101 ausgehenden übergehen, was wieder einer Addition resp. Subtraktion von je 2 gleichkommt.

Wir sehen also, daß alle nur ausführbaren Umstellungen hinauskommen auf Additionen und Subtraktionen von 1 resp. — in besonderen Fällen — von 2. Umgekehrt erkennt man leicht, daß jede einer Addition resp. Subtraktion von 1 entsprechende Operation stets ausführbar ist; denn jede die betreffende Stellung charakterisierende dyadische Zahl muß zu einem der Typen a, b, $\bar{a}$, $\bar{b}$ gehören und die der Addition resp. Subtraktion von 1 entsprechende Operation ist daher, wenn sie nicht im Heben oder Senken des letzten Ringes besteht, eine der soeben besprochenen, d. h. derjenigen, durch die a in $\bar{a}$ oder umgekehrt, b in $\bar{b}$ oder umgekehrt übergeht. Da nun die erstrebte Schlußstellung durch lauter Nullen : 000 ... charakterisiert ist, die Anfangsstellung dagegen durch 10101 ..., so wird es offenbar darauf ankommen, diese Zahl durch Additionen und Subtraktionen von je 1 in jene überzuführen, und

zwar sieht man sofort, daß nur Subtraktionen zulässig sind, wofern man den kürzesten Weg gehen will, da jede Addition die vorhergegangene Subtraktion wieder aufheben würde resp. durch eine folgende selbst wieder aufgehoben werden müßte. Wir haben damit für den einzuschlagenden Weg eine Ableitung gewonnen, die einfach darin besteht, daß wir die durch sukzessive Subtraktionen von je 1 (resp. von 2 in dem besonderen Falle) aus der ursprünglichen sich ergebenden Stellungen herbeizuführen suchen, also bei 5 Ringen nacheinander: 10101 (Anfangsstellung), 10100, 10011 usw.

Um umgekehrt die von der Spange losgetrennten Ringe wieder auf dieselbe zu bringen, sind die den sukzessiven Additionen von je 1 (resp. 2) entsprechenden Umstellungen (Anfangsstellung ist 0000 ...) auszuführen, wobei sich natürlich dieselbe Reihe von Stellungen, nur in umgekehrter Reihenfolge, ergibt wie bei dem ersten Verfahren.

Die erforderliche Anzahl von Umstellungen, um von 1010 ... zu 0000 ... zu gelangen, ergibt sich leicht folgendermaßen: Als „Übergänge von beschleunigtem Tempo", nämlich einer Subtraktion von je 2 entsprechend, hatten sich oben ergeben:

I	II
... 010	... 111
... 000	... 101.

Es fallen also fort die auf 001 und 110 ausgehenden Stellungen. Ist nun die Anzahl n der Ringe

1) gerade $= 2k$, so hat die Zahl 1010 ... 10 den Wert $\frac{2^{2k+1}-2}{3}$; so viele Umstellungen würden also erforderlich sein, wenn nur Subtraktionen von je 1 ausgeführt würden oder, was dasselbe ist, wenn wir einen Übergang von beschleunigtem Tempo als gleichbedeutend mit 2 Umstellungen ansähen. Rechnen wir einen solchen jedoch nur als *eine* Umstellung, so sind alle auf 001 und 110 ausgehenden Zahlen, die zwischen 1010 ... 10 und 0000 ... liegen, in Abzug zu bringen. Von der ersteren Art gibt es nun $\frac{2^{2k-2}-1}{3}+1$ und von der letzteren

eine weniger, also $\frac{2^{2k-2}-1}{3}$, zusammen also $\frac{2^{2k-1}+1}{3}$, so daß also unser Spiel $2^{2k-1}-1$ Umstellungen erfordert.

Ist 2) n ungerade $= 2k+1$, so hat die Zahl $1010\ldots1$ den Wert $\frac{2^{2k+2}-1}{3}$, und zu überspringen mit der Endung 001 sind $\frac{2^{2k-1}-2}{3}+1$ Zahlen und mit der Endung 110 wieder eine weniger, so daß hier 2^{2k} Umstellungen verbleiben.

Zusammenfassend erhalten wir also:

Anzahl der Ringe	Anzahl d. Umstellungen
$n = 2k$	$2^{2k-1}-1$
$n = 2k+1$	2^{2k}

Für das umgekehrte Verfahren gilt natürlich genau dasselbe. Dies sind die anläßlich der oben aufgestellten Tabelle bereits angekündigten Formeln (Anm. 1, S. 68).

Vergleichen wir das oben (S. 65/66) angegebene Verfahren mit dem jetzt mit Hilfe der Dyadik gewonnenen, so finden wir, daß beide sich decken; wir brauchen jedoch hierauf nicht näher einzugehen und beschränken uns auf die Bemerkung, daß natürlich auch die jetzt für die Anzahl der erforderlichen Umstellungen gewonnenen Ausdrücke der damals aufgestellten Rekursionsformel $u_n = 2u_{n-2} + 1 + u_{n-1}$ genügen, wie man sich leicht überzeugt, wobei man die jetzt abgeleiteten Formeln $u_{2k} = 2^{2k-1}-1$ und $u_{2k+1} = 2^{2k}$ zweckmäßig ersetzt durch die eine

$$u_n = 2^{n-1} - \frac{(-1)^n+1}{2}.$$

VII. Nim.

Der Ursprung des Spiels ist unbekannt. In Amerika wird es auf einigen Colleges, bisweilen dort auch wohl auf Jahrmärkten gespielt; es soll aber auch in Deutschland schon seit Jahrzehnten bekannt sein. Auch in China soll es gespielt werden und möglicherweise ist dies sein Ursprungsland. Jedenfalls

trägt es einen chinesischen Namen: „Fan-Tan“. Da man jedoch mit demselben Namen auch ein ganz anderes, bei Chinesen beliebtes Spiel bezeichnet, das ein reines Glücksspiel ist, so haben wir hier den obigen, von Chs. L. Bouton[1]) vorgeschlagenen Namen akzeptiert.

Man benutzt zu dem von zwei Personen gespielten Spiel eine Anzahl von irgendwelchen Objekten, etwa Zündhölzern oder kleinen Steinen. Es wird damit begonnen, daß 3 „Haufen“ von „Steinen“ gebildet werden, und zwar so, daß jeder Haufen, wie wir vorläufig der Einfachheit halber annehmen wollen, höchstens 7 und wenigstens 1 Stein[2]) enthalten mag. Das Spiel besteht nun darin, daß zunächst einer der Spielenden eine beliebige Anzahl von Steinen von einem Haufen fortnimmt, d. h. also wenigstens einen Stein und eventuell auch den ganzen Haufen. Innerhalb und mit Einschluß dieser Grenzen darf der Spielende also beliebig wählen, ebenso wie ihm auch die Wahl des Haufens überlassen bleibt; nur dürfen nicht gleichzeitig Steine verschiedener Haufen fortgenommen werden. Hierauf kommt der andere Spieler an die Reihe, um nun seinerseits nach denselben Bestimmungen, wie der erstere, zu verfahren, und zwar darf er denselben Haufen wie sein Gegner oder auch einen anderen wählen. So geht dies immer abwechselnd, so lange Steine vorhanden sind. Wer den letzten Stein bekommt, ist Sieger.

Das Spiel besitzt eine erschöpfende Theorie, welche lehrt, daß einer der beiden Spieler stets den Sieg erzwingen kann; welcher von beiden sich in dieser günstigen Lage befindet, ob derjenige, der beim Spiel beginnt, oder aber der zweite, hängt lediglich von der Anfangsstellung ab. Die mathematische Ent-

1) Charles L. Bouton, „Nim, a game with a complete mathematical theory“, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 3, Nr. 1, October 1901, p. 35.

2) Wir sprechen also aus Zweckmäßigkeitsgründen auch von einem „Haufen„ von einem Stein und überlassen den Philosophen die Erörterung der berühmten Streitfrage, bei welcher Mindestzahl von Objekten der vulgäre Begriff des Haufens beginnt.

wicklung und Begründung dieser Spieltheorie hat der schon genannte Prof. Bouton gegeben[1]), nachdem zuvor ein Nichtmathematiker, Paul E. More, den praktischen Kern dieser Theorie empirisch erkannt hatte.[2])

Wir wollen der Einfachheit halber die einzelnen Operationen der Spieler als ersten, zweiten usw. „Zug" unterscheiden. — Eine bestimmte Phase des Spiels ist offenbar durch die Anzahlen der Steine in den Haufen charakterisiert und mag daher etwa durch 1, 4, 6 bezeichnet werden, wenn der eine Haufen 1, ein anderer 4 und der dritte 6 Steine enthält. Die „Erzwingung" des Sieges erfolgt nun dadurch, daß es unter allen überhaupt möglichen „Positionen" gewisse ausgezeichnete oder, wie wir sagen wollen, „sieghafte" gibt, von der Art, daß der Spieler, der einmal eine dieser „sieghaften" Positionen durch seinen Zug herbeigeführt hat, nun bei weiterem richtigen Spiel unter allen Umständen, mag der Gegner Züge tun, welche er will, siegen muß.

Die „sieghaften" Positionen müssen offenbar den folgenden Bedingungen genügen:

1. *Es darf nach der Regel des Spiels nicht möglich sein, aus einer sieghaften Position durch nur einen weiteren Zug wieder eine sieghafte herzuleiten.*

2. *Jede, aus einer sieghaften Position durch einen Zug abgeleitete Position muß sich durch den nächsten Zug wenigstens in eine sieghafte Position überführen lassen.*

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so kann, wenn A eine sieghafte Position herstellt, B durch seinen Zug eine sieghafte keinesfalls herbeiführen (Bedingung 1), muß vielmehr die von A hergestellte sieghafte Position in eine solche nichtsieghafte überführen, daß A, der nunmehr wieder an die Reihe kommt, daraus wieder eine sieghafte Position herstellen kann (Bedingung 2). A schreitet so von einer sieghaften Position

1) Bouton l. c. p. 35—39.

2) Allerdings für eine weiter unten zu besprechende Variante unseres Spiels.

zu einer anderen sieghaften fort; damit er so auch zum Siege fortschreitet, muß noch folgende Bedingung erfüllt sein:

3. *Die Position* 0, 0, 0 *muß zu den „sieghaften" gehören.*

Unsere Bedingung 2 wollen wir dahin erweitern, daß wir fordern:

2^a. *Jede nichtsieghafte Position muß sich durch den nächsten Zug wenigstens in eine sieghafte überführen lassen.*

Wir führen nun eine zweite Art von Positionen ein, die wir „richtige" nennen wollen; als solche definieren wir alle diejenigen Positionen a, b, c, die der Bedingung genügen, daß die 3 Zahlen a, b und c, in dyadischer Schreibweise untereinander geschrieben, in jeder Vertikalreihe 0 oder 2 ergeben. Eine solche Position ist z. B. 3, 9, 10; denn es ist in dyadischer Schreibweise

$$\begin{array}{r} 3 = 11 \\ 9 = 1001 \\ 10 = 1010 \\ \hline 2022 \end{array}$$

Für das Gebiet der Zahlen von 1 bis 15 inkl. gibt es folgende richtige Positionen:

1, 2, 3	2, 4, 6	3, 4, 7	4, 8, 12
1, 4, 5	2, 5, 7	3, 5, 6	4, 9, 13
1, 6, 7	2, 8, 10	3, 8, 11	4, 10, 14
1, 8, 9	2, 9, 11	3, 9, 10	4, 11, 15
1, 10, 11	2, 12, 14	3, 12, 15	
1, 12, 13	2, 13, 15	3, 13, 14	
1, 14, 15			

5, 8, 13	6, 8, 14	7, 8, 15
5, 9, 12	6, 9, 15	7, 9, 14
5, 10, 15	6, 10, 12	7, 10, 13
5, 11, 14	6, 11, 13	7, 11, 12.

Zu diesen kommen dann weiter alle Positionen von der Form 0, i, i (für das ausgewählte Gebiet ist $i = 1, 2, 3, \ldots 15$),

d. h. alle mit nur zwei und zwar unter sich gleichen Haufen (sind in a, b, c die sämtlichen Ziffern von a gleich Null, so müssen, damit die Position unserer Definition gemäß „richtig" ist, alle dyadischen Ziffern von c gleich den entsprechenden von b sein). Schließlich gehört zu den „richtigen" Positionen in Übereinstimmung mit der Definition 0, 0, 0.

Wir nennen nun alle Positionen, die nicht zu den „richtigen" gehören, „unrichtig" und behaupten, daß alle „richtigen" Positionen auch zugleich „sieghaft" im Sinne unserer obigen Definition sind, d. h. den obigen Bedingungen 1, 2 (resp. 2^a) und 3 genügen. Bezüglich Bedingung 3 ist dies soeben bereits gesagt. Unser Nachweis ist also geführt, wenn es uns gelingt zu beweisen, daß für die „richtigen" Positionen folgende, den Bedingungen 1 und 2^a entsprechende Sätze gelten:

Satz 1: *Eine „richtige" Position kann durch den nächsten Zug nie wieder in eine „richtige", sondern immer nur in eine „unrichtige" Position übergeführt werden.*

Satz 2: *Eine „unrichtige" Position läßt sich durch den nächsten Zug zwar stets in zahlreiche „unrichtige", jedoch auch stets in mindestens eine „richtige" Position überführen.*

Zum Zwecke des Beweises machen wir zunächst folgende

Vorbemerkung: *Zwei dyadische Zahlen c und d, von denen c die größere ist, können, von links ab gerechnet, in mehreren Ziffern übereinstimmen; an der ersten Stelle aber, wo sie nicht mehr übereinstimmen, hat c eine* 1 *und d eine* 0.

(Die dyadische Zahl 10000 ... (n Nullen) ist größer als 011111 ... (n Einsen); denn die erste ist $= 2^n$, die zweite

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1.)$$

Satz 1 beweist sich dann so:

Hinterläßt A dem B etwa die „richtige" Position a, b, c, so muß B von einem der Haufen eine Anzahl von Steinen fortnehmen, d. h. die Position a, b, c geht über in a, b, d etwa, wo jedenfalls d kleiner als c ist. Dann wird nach der „Vorbemerkung" die erste Vertikalreihe von links, in der die dyadischen Zahlen c und d nicht übereinstimmen, bei c eine 1 und bei d eine 0

aufweisen. War a, b, c „richtig", so mußte aber außer c noch eine der dyadischen Zahlen a und b, etwa b, in der betreffenden Vertikalreihe eine 1 aufweisen und die andere (a) dann eine 0, damit die Summe in dieser Reihe $= 2$ wird, wie es nach der Definition der „richtigen" Positionen sein muß. In der Position a, b, d ergibt diese Vertikalreihe also jetzt $0 + 1 + 0 = 1$, d. h. die Position ist jedenfalls „unrichtig", w. z. b. w.

Für Satz 2 geben wir folgenden Beweis:

Ist die Position a, b, c „unrichtig", so muß es jedenfalls in den untereinander stehenden dyadischen Zahlen a, b, c mindestens eine Vertikalreihe mit der Summe 1 oder 3 geben. Gibt es deren mehrere, so betrachten wir von ihnen die erste von links ab; hier muß eine der 3 Zahlen, etwa c, sicher eine 1 aufweisen, während a und b hier beide 1 oder beide 0 haben. Ersetzen wir nun c durch eine Zahl d, die in dieser Vertikalreihe eine 0 statt 1 hat, links davon aber mit c übereinstimmt, so ist zunächst jedenfalls („Vorbemerkung") d kleiner als c, und die übrigen noch unbestimmten Ziffern von d rechts von jener Vertikalen lassen sich offenbar sehr leicht so wählen, daß a, b, d eine „richtige" Position wird. Da d kleiner als c ist, so ist der Übergang von der unrichtigen Position a, b, c zu der richtigen a, b, d der Spielregel gemäß ausführbar, w. z. b. w.

Wir haben somit gezeigt, daß die „richtigen" Positionen auch „sieghaft" sind; sie bilden aber auch, wie aus dem Begriff der sieghaften Positionen folgt, die einzigen sieghaften Positionen, so daß „richtige" und „sieghafte" Positionen identisch sind. Um dies einzusehen denken wir uns, der eine Spieler, A, habe eine Position P hergestellt, die sieghaft sei, d. h. die dem A gestatte, den Sieg zu erzwingen, die aber dennoch nicht „richtig", also „unrichtig" sei. Alsdann könnte nach Satz 2 der Spieler B die unrichtige Position P in eine richtige überführen und nun seinerseits den Sieg erzwingen, so daß also P nicht „sieghaft" sein kann. Wir werden bei dieser Identität hinfort statt „sieghafter" Positionen „richtige" sagen dürfen.

Die Zahl der richtigen Positionen ist natürlich viel geringer als die der unrichtigen; so ist beispielsweise von allen

Positionen, die in einem Haufen einen, in einem zweiten zwei Steine aufweisen, nur 1, 2, 3 richtig, während 1, 2, 4; 1, 2, 5; 1, 2, 6 usw. alle unrichtig sind. Allgemein sind, wenn a, b, c eine richtige Position ist, $a, b, c-1$; $a, b, c-2$; $a, b, c-3$; ..... und $a, b, c+1$; $a, b, c+2$; $a, b, c+3$..... alle unrichtig; denn zwei richtige Positionen von der Form a, b, c und $a, b, d (d \gtrless c)$ gibt es nicht, wie implizite bereits bei dem Beweise von Satz 1 gezeigt ist; andernfalls könnte ja — entgegen Satz 1 — die eine richtige Position in die andere durch einen Zug übergeführt werden.[1])

Beschränkt man sich auf ein Spiel, bei dem die Zahl der Steine jedes Haufens stets unterhalb der Grenze 2^n liegen soll, bei dem also die erforderlichen dyadischen Zahlen höchstens $(n-1)$ Stellen aufweisen, so beträgt die Anzahl der verschiedenen Kombinationen von 3 Haufen[2]):

$$\frac{2^{n-1}(2^{2n}-1)}{3}.$$

Von diesen sind richtig

$$\frac{(2^n-1)(2^{n-1}-1)}{3}$$

und unrichtig also

$$\frac{2^{n-1}(2^{2n}-1)}{3} - \frac{(2^n-1)(2^{n-1}-1)}{3} = \frac{(2^n-1)(2^{2n-1}+1)}{3}.$$

Das Verhältnis v der Anzahl der unrichtigen Positionen zu derjenigen der richtigen ist somit:

$$v = \frac{2^{2n-1}+1}{2^{n-1}-1} = 2^n + 2 + \frac{3}{2^{n-1}-1},$$

also für unseren obigen Spezialfall ($n=4$) z. B. $= 18\frac{3}{7}$; für $n=7$ ist v bereits > 130 und wächst mit wachsendem n rapide.

---

1) Ein System von richtigen Positionen a, b, c stellt somit, soweit die a, b, c alle von 0 verschieden sind, ein sogenanntes „Tripelsystem" dar (s. in Bd. II das Kapitel „Anordnungsprobleme", Abschnitt II; vgl. auch hier Kap. VI, § 2): jede Zahl a kommt mit jeder anderen b in einem, aber auch nur einem Tripel zusammen vor; denn durch a, b ist die dritte Zahl bereits völlig und eindeutig bestimmt.

2) Wir berücksichtigen hier nur die Fälle, in denen die von den Spielern nach irgendwelchem Übereinkommen gewählten Anfangsstellungen wirklich 3 Haufen, nicht etwa weniger, aufweisen.

In der großen Zahl der Fälle wird somit die willkürlich gewählte Anfangsstellung unrichtig sein und der beginnende Spieler (A) kann dann jedenfalls die Anfangsposition in eine richtige überführen (Satz 2); dagegen muß B hierauf dem A wieder eine unrichtige Position überlassen (Satz 1); A führt diese wieder in eine richtige über usw. Hierbei wird schließlich ein Haufen verschwinden:

a) Führte A das Verschwinden dieses Haufens herbei, so müssen, wofern A, wie vorausgesetzt wird, nach den Vorschriften unserer Spieltheorie gespielt hat, die beiden anderen Haufen gleich groß sein, da sonst die Position, die A hinterläßt, nicht „richtig" wäre. B nimmt nun einige Stücke von einem der beiden gleichen Haufen und A tut stets dasselbe bei dem anderen Haufen, so daß die Haufen nach den Zügen von A stets gleich groß sind. A muß dabei dann das letzte Stück erhalten, also siegen.

b) Bringt B den ersten Haufen zum Verschwinden, so können, da B stets unrichtige Positionen hinterläßt, die beiden restierenden Haufen nicht gleich groß sein, wohl aber kann A beim nächsten Zuge sie gleich machen, worauf sich dasselbe wiederholt wie im Fall a).

In den verhältnismäßig seltenen Fällen dagegen, in denen die anfängliche Position „richtig" ist, kann A dem B nur eine unrichtige Position überlassen (Satz 1) und letzterer jetzt eine richtige herstellen, worauf B bei richtigem Spiel siegen muß.

Damit ist bewiesen, daß im allgemeinen der Anziehende, in Ausnahmefällen dagegen der Nachziehende den Sieg erzwingen kann.

Kürzlich wurde unser Spiel, in eine andere Form gekleidet, den Lesern der Unterhaltungsbeilage zur „Danziger Zeitung"[1]) als Aufgabe vorgelegt. Wir beschränken uns hier darauf, in der neuen Einkleidung eine spezielle Aufgabe zu behandeln:

1) Siehe „Heimat und Welt, Mittwochs-Unterhaltungsbeilage der Danziger Zeitung" 1907, Nr. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 (23. Jan. bis 13. März): „Der Letzte gewinnt!" Verfasser dieser Aufgabe war H. Bindemann, Regierungs- und Baurat in Charlottenburg.

Auf einer Reihe von Feldern[1]), z. B. 9, stehen 3 Steine, etwa auf den Feldern *d, f, i* (s. Fig. 10)[2]). Zwei Spieler, *A* und *B*, sollen in abwechselnden Zügen die 3 Steine auf das Schlußfeld *a* nach folgenden Regeln bringen: Jeder Spieler hat bei jeder Tour einen und auch nur einen Stein, den er jedesmal

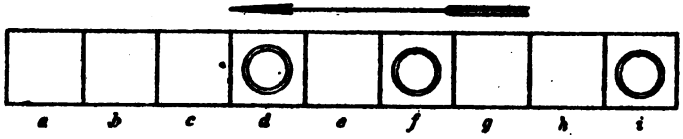


Fig. 10.

beliebig wählen darf, zu ziehen, und zwar soweit er will, allerdings nur in der Richtung des Pfeils, also von rechts nach links. Der Stein darf also auch auf ein von einem anderen Stein besetztes Feld gezogen werden oder einen anderen Stein überspringen. Wer den letzten Stein in das Schlußfeld *a* bringt, ist Sieger.

Man erkennt sofort die vollständige Identität dieses Spiels mit unserem „Nim“: Bezeichnen wir den Abstand des Feldes *b* vom Schlußfeld *a* mit 1, so hat *d* von *a* den Abstand 3, *f* und *i* die Abstände 5 resp. 8. Die Anfangsstellung der Figur ist somit völlig charakterisiert durch 3, 5, 8. Die 3 Steine entsprechen also den 3 Haufen beim „Nim“. Das Vorrücken der Steine nach dem Schlußfelde zu entspricht der Verminderung der 3 Haufen beim „Nim“. Da nun vor allem auch die Spielregeln sich vollständig entsprechen, so dürfen wir unsere oben gewonnenen Resultate hier sofort nutzbar machen: Die Anfangsstellung 3, 5, 8 ist nun „unrichtig“ (vgl. a. das Schema S. 75) und

---

1) In dem angegebenen Blatte war eine Reihe des Schachbretts; also ein achtfeldriges Gebiet, genommen. Da der Leser die grundlegende Bedeutung, die der Zahl 2 in der Theorie unseres Spiels zukommt, zu der $8 = 2^3$ fälschlich in Beziehung setzen könnte, haben wir hier ein neunfeldriges Gebiet vorgezogen, haben aber die dem Schach entnommene Bezeichnung der Felder durch Buchstaben beibehalten.

2) In der Figur sind die Felder entgegen dem Schachbrett alle einfarbig gezeichnet.

läßt sich in die „richtige“ 3, 5, 6 überführen. Der Spieler A muß also den Anfang mit dem Zuge $i-g$ machen. Der zweite Spieler, B, findet somit die Stellung d, f, g vor. 1) Zieht B nun so, daß ein Doppelstein auf einem Felde entsteht, z. B. $g-f$ oder $g-d$ oder $f-d$, so läßt A die beiden zusammenliegenden Steine unberührt und zieht den dritten ins Schlußfeld. B findet dann für den nächsten Zug etwa die Stellung d, d vor und zieht nun z. B. einen der Steine von d nach c; A rückt dann mit dem zweiten Steine nach c nach und muß bei dieser Taktik, die der beim „Nim“ oben befolgten völlig gleich ist, gewinnen. 2) Vermeidet B beim ersten Zuge die Herstellung eines Doppelsteins und zieht z. B. $f-e$, so findet A für seinen zweiten Zug die Stellung d, e, g oder 3, 4, 6 vor. A hat alsdann nur einen richtigen Zug: $d-c$, wodurch die richtige Position c, e, g resp. 2, 4, 6 entsteht. Unter den verschiedenen möglichen Fortsetzungen sei nur folgende herausgegriffen, wobei wir neben dem jeweiligen Zug die durch den Zug geschaffene Position in Klammer angeben:

A	B
	$g-f$
	(c, e, f resp. 2, 4, 5)
notwendig: $c-b$	etwa $e-d$
(b, e, f resp. 1, 4, 5)	(b, d, f resp. 1, 3, 5)
notwendig: $f-c$	etwa $c-a$
(b, d, c resp. 1, 3, 2)	(b, d resp. 1, 3)
notwendig: $d-b$	$b-a$
(b, b resp. 1, 1)	(b resp. 1).
$b-a$ und gewinnt.	

Bereits oben[1]) wurde beiläufig eine andere Spielart des „Nim“ erwähnt, die anscheinend sogar die verbreitetere ist und bei wel-

1) In Anmerkung 2 S. 74.

cher derjenige, der den letzten Stein nehmen muß, als Verlierer gilt, während im übrigen die Spielgesetze dieselben bleiben. Da jetzt die Position 1, 0, 0 demjenigen, der sie herstellt, den Sieg verleiht, so ist bei unveränderten Bedingungen 1 und 2 die Bedingung 3 zu ändern in:

3'. *Die Position 1, 0, 0 muß zu den „sieghaften" („richtigen") gehören.*

Die frühere Definition der „richtigen" Positionen ändern wir daher jetzt dahin ab, daß die Positionen 1, 1, 0 und 0, 0, 0 jetzt als „unrichtig" und dafür 1, 1, 1 und 1, 0, 0 als „richtig" angesehen werden sollen.

Auch jetzt kann derjenige Spieler — sagen wir S —, der eine unrichtige Stellung (in dem jetzt definierten Sinne) — sei es zu Beginn des Spiels, sei es nach dem ersten Zuge — vorfindet, den Sieg erzwingen, indem er die vorgefundene unrichtige Stellung in eine richtige überführt und so wieder von einer richtigen Stellung zur andern fortschreitet. Zunächst wird dies ganz in der alten Weise geschehen; nur wird S die Position 1, 1, 0, die vorher richtig war, jetzt aber als unrichtig gilt, zu meiden und statt ihrer eine der neuen richtigen Positionen herzustellen haben. Wir haben demnach zu zeigen:

1. daß S in allen Fällen, in denen er früher die Position 1, 1, 0 herstellte, jetzt entweder die Position 1, 1, 1 oder 1, 0, 0 herstellen kann;

2. daß S, wenn er eine dieser neuen richtigen Positionen hergestellt hat, den Sieg erzwingt;

3. daß S, wenn er die früher richtige, jetzt unrichtige Position 1, 1, 0 vorfindet, den Sieg erzwingen kann;

4. daß T, der Gegner von S, bei richtigem Spiel des letzteren auch in dem neuen Sinne richtige Positionen nicht herstellen kann.

Erst wenn wir dies bewiesen haben, sind unsere früheren Darlegungen so weit ergänzt, daß sie eine entsprechende Theorie der neuen Spielform darstellen. Ad 1. ist nun zu sagen, daß die Position, die bei früherem Spielverfahren den Spieler S zur Herstellung der Position 1, 1, 0 veranlaßte, ent-

weder 1, 1, n oder 1, m, 0 war, wo $n \geqq 1$ und $m > 1$ ist. Wenn nun S jetzt die Position 1, m, 0 vorfindet, so stellt er daraus — statt vorher 1, 1, 0 — die neue richtige Position 1, 0, 0 her. Findet er aber 1, 1, n vor und ist $n > 1$, so stellt er daraus — statt vorher 1, 1, 0 — jetzt 1, 1, 1, die andere neue richtige Position, her. Bleibt also nur der Fall, daß S die Position 1, 1, n für $n = 1$ oder: 1, 1, 1 vorfände. Dies ist aber gar nicht möglich; denn T kann diese Position nicht herstellen, da er sie aus einer Position 1, 1, p ($p \geqq 2$) herstellen müßte und S eine solche auch im alten Sinne unrichtige Position seinem Gegner nicht hinterläßt.

Die Richtigkeit von 2. leuchtet ohne weiteres ein; denn aus 1, 1, 1 folgt notwendig 1, 1, 0 und daraus 1, 0, 0 und damit die Niederlage des Gegners. Damit erledigt sich auch zugleich Punkt 3.

Ad 4. schließlich ist zunächst von den ad 1. gemachten Ausführungen zu wiederholen, daß T eine Position 1, 1, p ($p \geqq 2$) nicht vorfindet und daher die eine neue richtige Position: 1, 1, 1, nicht herstellen kann. Ebensowenig kann er aber die andere neue richtige Position: 1, 0, 0 herstellen; denn sie müßte hervorgehen entweder aus n, 0, 0 ($n > 1$) oder aus 1, m, 0 ($m \geqq 1$). Solche Positionen hinterläßt aber S seinem Gegner nicht: n, 0, 0 ($n > 1$) ist unrichtig im alten wie neuen Sinne und von 1, m, 0 gilt für $m > 1$ dasselbe; bezüglich $m = 1$ aber oder bezüglich der Position 1, 1, 0 sahen wir bereits oben (ad 1.), daß S diese Position nicht herstellt, vielmehr in den betreffenden Fällen stets eine der beiden neuen richtigen Positionen herstellen kann und herstellt. —

Das Spiel kann, wie Bouton bereits bemerkt hat[1]), auch mit mehr als 3 Haufen gespielt werden, und unsere Erörterungen lassen sich leicht ohne besondere Änderungen auf diese Spielart übertragen. Als „richtige" Positionen sind alsdann für die erste Spielform alle die definiert, die, dyadisch geschrieben, in jeder Kolumne eine gerade Zahl (0, 2, 4 usw.)

1) Bouton, l. c. §§ 5 und 6.

ergeben. Unser obiges System richtiger Positionen geht also durch Zusatz der erforderlichen Nullen in das neue größere über. Für die zweite Spielform ist die Definition dieselbe, nur wieder mit der Modifikation, daß die Position

$$1, 1, 1, 1, 1 \ldots\ldots 0, 0, 0, 0 \ldots.$$

mit ungerader Anzahl Haufen von je einem Stein als richtig, mit gerader Anzahl als unrichtig gilt.

Im Gegensatz zu diesen sich leicht darbietenden Ausdehnungen auf 4 und mehr Haufen, bei denen die Spielgesetze gar keine wesentlichen Änderungen erleiden, hat W. A. Wythoff in Amsterdam eine interessante Modifikation unseres Spiels mit **nur zwei Haufen** angegeben.[1]) Die Anzahl der Steine in jedem der beiden Haufen ist bei Beginn des Spiels wieder beliebig; die abwechselnden Züge der beiden Spieler bestehen jetzt darin, daß entweder, wie zuvor, von einem Haufen eine beliebige Anzahl Steine fortgenommen wird oder aber von beiden Haufen zugleich Steine fortgenommen werden, alsdann jedoch von dem einen ebensoviele wie von dem anderen. Derjenige, der den letzten Stein erhält, ist Sieger.

Auch hier handelt es sich darum, das System „richtiger" Positionen zu eruieren. Durften bei 3 Haufen, damit Bedingung 1, die Nichtüberführbarkeit einer richtigen Position in eine andere solche, erfüllt sei, irgend zwei richtige Positionen höchstens in einer der 3 Zahlen übereinstimmen, so dürfen hier aus demselben Grunde zwei richtige Positionen offenbar überhaupt nie in einer Zahl übereinstimmen, so daß in dem ganzen System der richtigen Positionen jede Zahl nur höchstens einmal auftritt. Mit Rücksicht darauf, daß der „Zug" des Spiels hier ein anderer (zwiefacher) ist, ist aber die Nichtüberführbarkeit der richtigen Positionen ineinander erst dann gesichert, wenn außerdem auch die Differenz zwischen den

---

1) W. A. Wythoff, „A Modification of the Game of Nim" (1906), Nieuw Archief voor Wiskunde (2) VII, 1907, p. 199—202.

beiden Zahlen einer richtigen Position bei keiner anderen ebenso groß ist. Wythoff stellt so folgendes System richtiger Positionen auf:

0, 0	11, 18
1, 2	12, 20
3, 5	14, 23
4, 7	16, 26
6, 10	17, 28
8, 13	19, 31
9, 15	21, 34 usw.,

und wir behaupten, daß sie den Bedingungen 1 und 2^a, — auch der Bedingung 3 mutatis mutandis, was jedoch keiner Erwähnung bedarf — genügen. Die Forderungen, die Bedingung 1 für unseren Fall involviert, haben wir soeben schon formuliert und heben daher nur noch hervor, daß in der Tat diese Forderungen erfüllt sind, nämlich erstens jede Zahl (> 0) in dem System nur an einer Stelle vorkommt (jede einzelne Kombination beginnt mit der kleinsten, in allen vorhergehenden Kombinationen noch nicht vorkommenden Zahl) und daß zweitens, wenn wir die Differenzen der Zahlen in den einzelnen Kombinationen berechnen, diese der Reihe nach 0, 1, 2, 3, 4 usw. sind und so stets um 1 zunehmen, also jedenfalls unter sich alle verschieden sind.

Daß auch der Bedingung 2^a (S. 75) Genüge geschieht, ist gleichfalls leicht zu sehen: Es sei a, b irgend eine unrichtige Position; Bedingung 2^a fordert, daß sie in eine richtige überführbar sei. Wir dürfen annehmen: $a < b$; denn wenn $a = b$ wäre, so ließe sich a, b sofort in die letzte der richtigen Positionen, nämlich 0, 0, überführen. Da das obige System der richtigen Positionen nach dem Grundsatz konstruiert ist, daß, wie schon gesagt, jede Kombination mit der kleinsten bis dahin nicht vorgekommenen Zahl beginnt, so kommt in dem System jede Zahl nicht nur höchstens einmal, sondern auch mindestens

einmal vor.[1]) Es muß also irgend eine richtige Position mit a geben, sagen wir: a, c resp. c, a. Wir unterscheiden nun:

1) $c > b$. Dann ist, da $b > a$, auch $c > a$ und die Differenz $c - a > b - a$; also findet sich unter den Positionen, die a, c in dem obigen System vorhergehen, bereits eine, für welche die Differenz der Zahlen $= b - a$ ist; in diese läßt sich a, b überführen durch gleichzeitige Verringerung beider Haufen um dieselbe Anzahl.

2) $c < b$. Dann läßt sich a, b sofort in a, c überführen durch Fortnahme von $b - c$ Steinen von dem größeren Haufen.

Obwohl die Fortsetzung des vorstehenden Wythoffschen Systems richtiger Positionen durch die angegebenen Bildungsvorschriften eindeutig bestimmt ist, wie wir sahen, so wollen wir doch auch eine allgemeine Formel als Bildungsgesetz für das System angeben; diese lautet nach Wythoff so:

$$\left[\tfrac{1}{2}k(1+\sqrt{5})\right],\ \left[\tfrac{1}{2}k(3+\sqrt{5})\right];\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots,$$

wo durch die eckigen Klammern in üblicher, von Gauß eingeführter Bezeichnung angedeutet werden soll, daß stets die nächst kleinere ganze Zahl zu nehmen ist. Wir forderten nun oben von dem System der richtigen Positionen: 1. daß jede ganze Zahl (> 0) gerade an einer Stelle darin vorkomme, 2. daß auch jede ganze Zahl gerade einmal als Differenz zwischen den Zahlen einer Position auftrete. — Diese zweite Bedingung ist, da die Differenz allgemein k ist und dieses alle Zahlenwerte der natürlichen Zahlenreihe durchläuft, offenbar erfüllt. Bleibt also der Nachweis der ersten: Es sei m irgendeine ganze Zahl; wir wollen zeigen, daß sie in unserem also definierten System gerade an einer Stelle vorkommt, d. h. daß es

1) Die Fortsetzung des Systems über den oben angegebenen Anfang hinaus ergibt sich nach den angegebenen Grundsätzen eindeutig: die nächste Position müßte mit 22, der kleinsten, noch nicht vorgekommenen Zahl, beginnen und die Differenz 14 aufweisen, also 22, 36 lauten; dann käme 24, 39; darauf 25, 41 usw. usw.

einen und nur einen Wert von k gibt, für den eine der beiden Zahlen: $\left[\frac{1}{2}k(1+\sqrt{5})\right]$ oder $\left[\frac{1}{2}k(3+\sqrt{5})\right]$, den Wert m hat.

Zum Beweise[1]) nehmen wir an, es seien α und β die kleinsten Größen, die man zu m addieren muß, um ein Vielfaches von $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ resp. von $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ zu erhalten, so daß wir also haben:

$$\begin{aligned} m+\alpha &= \tfrac{1}{2}p(1+\sqrt{5}) \\ m+\beta &= \tfrac{1}{2}q(3+\sqrt{5}), \end{aligned} \tag{1}$$

wo p und q ganze Zahlen sind und

$$\begin{aligned} 0 < \alpha &< \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 0 < \beta &< \tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \end{aligned} \tag{2}$$

ist. Aus den obigen Gleichungen (1) folgt durch Multiplikation mit $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ resp. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und nachherige Addition:

$$\tfrac{1}{2}\alpha(-1+\sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}\beta(3-\sqrt{5}) = p+q-m, \tag{3}$$

und aus den Ungleichungen (2) entsprechend:

$$0 < \tfrac{1}{2}\alpha(-1+\sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}\beta(3-\sqrt{5}) < 2. \tag{4}$$

Nach Gleichung (3) ist der Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\alpha(-1+\sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}\beta(3-\sqrt{5})$$

eine ganze Zahl; nach Gleichung (4) liegt er andererseits zwischen den Grenzen 0 und 2 mit Ausschluß dieser. Es folgt also:

$$\tfrac{1}{2}\alpha(-1+\sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}\beta(3-\sqrt{5}) = 1. \tag{5}$$

Dieser Gleichung (5) wird genügt zunächst durch $\alpha = \beta = 1$, doch widersprechen diese Werte den Gleichungen (1); denn

1) Wythoff, l. c. p. 200/201.

da in diesen auf den rechten Seiten irrationale Zahlen stehen, können — bei ganzzahligem m — weder α noch β ganzzahlig sein. Daraus, daß die linke Seite von (5) für $\alpha = \beta = 1$ den vorgeschriebenen Wert 1 erreicht, folgt, daß sie, wenn α und β beide kleiner wären, < 1 sein würde. Es muß also eine der Größen α, β größer als 1, die andere < 1 sein. Wenn nun $\alpha < 1$, $\beta > 1$ ist, so ist nach (1)

$$m = \left[\tfrac{1}{2}p(1+\sqrt{5})\right],$$

$$m+1 = \left[\tfrac{1}{2}q(3+\sqrt{5})\right].$$

Ist aber $\alpha > 1$, $\beta < 1$, so ist

$$m+1 = \left[\tfrac{1}{2}p(1+\sqrt{5})\right],$$

$$m = \left[\tfrac{1}{2}q(3+\sqrt{5})\right].$$

Im ersten Falle tritt m unter den $\left[\tfrac{1}{2}k(3+\sqrt{5})\right]$ nicht auf, dagegen unter den $\left[\tfrac{1}{2}k(1+\sqrt{5})\right]$, und im zweiten Falle ist es umgekehrt. In jedem Falle gibt es also in dem System $\left[\tfrac{1}{2}k(1+\sqrt{5})\right]$, $\left[\tfrac{1}{2}k(3+\sqrt{5})\right]$ nur eine Stelle, an der die beliebige ganze Zahl m vorkommt, was zu beweisen war.

Aus diesen Darlegungen erhellt zugleich die Identität des durch die Formel $\left[\tfrac{1}{2}k(1+\sqrt{5})\right]$, $\left[\tfrac{1}{2}k(3+\sqrt{5})\right]$ mit dem oben (S. 85; s. a. Anm. 1, S. 86) in anderer Weise definierten System, worauf wir nicht näher einzugehen brauchen.

Wythoff[1]) gibt noch die Formeln für verschiedene andere ähnliche Systeme von Positionen an, die als „richtige" zu anderen Spielvarianten mit entsprechend modifizierten Spielregeln gehören würden.

§ 4. Das Gewichtsproblem Leonardos von Pisa.

Die Gewichtssätze unserer gleicharmigen Wagen bestehen gewöhnlich aus folgenden Stücken:

1 g., 2 g., 2 g., 5 g., 10 g., 20 g., 20 g., 50 g.

1) Wythoff, l. c. p. 201/202.

und setzen sich nach diesem Prinzip eventuell nach beiden Seiten hin fort. Wir erheben nun die Frage, ob sich dieselben Wägungen, wie mit diesen Gewichten, noch mit einer geringeren Anzahl von Gewichten ausführen ließen resp. wie viele Gewichte mindestens und welche hierzu erforderlich sind. Ein aus den oben angegebenen Gewichten bestehender Satz liefert jedenfalls alle Gewichte zwischen 1 g. und 100 (genau: 110) g., von g. zu g. Nach unseren früheren Darlegungen (s. den „Satz" S. 36) erhalten wir diese aber auch durch folgende Gewichte:

1 g., 2 g., 4 g., 8 g., 16 g., 32 g., 64 g.

Dies sind nur 7 Stücke gegenüber 8 oben, und wir können mit ihnen sogar noch etwas weiter, nämlich bis 127 g., abwägen.

Führt man die Wägungen jedoch in der Weise aus, daß man eventuell auf die zweite Schale ein Gegengewicht legt, so genügen bereits 5 Gewichte völlig für den angegebenen Spielraum (1—100 g.), nämlich:

1 g., 3 g., 9 g., 27 g., 81 g.,

indem $2 = 3 - 1$ usw. (vgl. S. 41).

Bereits Leonardo von Pisa, ein hervorragender Mathematiker aus dem Anfange des 13. Jahrhunderts, erkannte, daß man in dieser Weise alle Wägungen von 1 bis 40 g. von g. zu g. mit nur 4 Gewichten ausführen könne und fragte: welche Gewichte sind das?[1]) Seine Antwort lautete: Gewichte von 1, 3, 9, 27 g. Später findet sich dies Problem wieder bei den verschiedensten Autoren: ich nenne aus dem 16. Jahrhundert Gemma Frisius[2]) und Tartaglia[3]), aus dem Anfange des

---

1) Leonardo Pisano, „Liber Abaci". Scritti, pubbl. da Boncompagni, I, Roma 1857, p. 297.

2) Gemma Frisius, „Arithmeticae practicae methodus facilis", 1544, (unpaginiert: 14. und 15. Seite der „Pars quarta").

3) Tartaglia, „General Trattato" . . . (s. liter. Index), 1556, Libro primo, Cap. XV, fol. 13^{v}—14^{v}, art. 32—35. Bei Ball, Ausgabe von Fitz-Patrick, I, 1907, p. 118 ist nur der erste Teil dieses Abschnitts aus Tartaglia berücksichtigt.

17. Jahrhunderts Bachet[1]), der gewöhnlich als der Urheber unseres Problems angegeben wird, und schließlich, um auch einen neueren Meister der Zahlentheorie zu nennen: Leonhard Euler.[2])

Wir wenden uns nunmehr zu einer systematischen Behandlung des aufgeworfenen Problems und fragen: **Wie viele verschiedene Wägungen lassen sich höchstens mit r Gewichten ausführen?** — Betragen die einzelnen Gewichtsstücke bzw. a_1, $a_2 \dots a_r$ g., so können wir die Wägung all solcher Gewichte ausführen, deren Maßzahlen sich als algebraische Summen von $a_1, a_2 \dots a_r$ ergeben; dies sind zunächst $a_1, a_2 \dots a_r$ selbst, sodann die durch Kombinationen von je 2 entstehenden, also $a_1 + a_2$, $a_1 - a_2$ usw., dann die aus je 3, nämlich $a_1 + a_2 + a_3$, $a_1 + a_2 - a_3$, $a_1 - a_2 + a_3$, $a_1 - a_2 - a_3$ usw., wo eventuell bei negativem Wert alle Glieder des betreffenden Aggregats mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen sind. Im Maximum, d. h. wenn alle so erhaltenen Zahlen verschieden sind, erhält man so der Anzahl nach an verschiedenen Wägungen:

$$r + 2\binom{r}{2} + 2^2\binom{r}{3} + 2^3\binom{r}{4} + \dots + 2^{r-1}\binom{r}{r} = \frac{3^r - 1}{2}.$$

(Bezeichnet man die links stehende Summe kurz mit x, so sieht man leicht, daß $1 + 2x = (1 + 2)^r = 3^r$, also $x = \frac{3^r - 1}{2}$ ist.)

Eine obere Grenze für die Anzahl der verschiedenen Wägungen ist also $\frac{3^r - 1}{2}$. Wir fragen uns nun weiter: **Lassen sich die r Gewichte so auswählen, daß nicht nur diese „obere Grenze" von $\frac{3^r - 1}{2}$ verschiedenen Wägungen tatsächlich erreicht wird, sondern auch zugleich die Maßzahlen dieser Wägungen die $\frac{3^r - 1}{2}$ kleinsten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind?** —

---

1) Bachet, „Problèmes plaisants", Ausg. von 1624, p. 215 ff.; Ausg. von Labosne von 1879, p. 154—156.

2) Leonh. Euler, „Introductio in analysin infinitorum", Lausanne 1748, t. I, p. 273—275. Vgl. dazu auch Kronecker, „Vorlesungen über Zahlentheorie", herausg. v. K. Hensel, I, 1901, p. 49/50.

Offenbar müssen dann die $a_1, a_2 \ldots a_r$ alle verschieden sein, und wir dürfen annehmen: $a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_r$. Die größte daraus zu komponierende Zahl ist $\sum_1^r a_i$, dann folgt $\sum_2^r a_i$, und da diese 2 aufeinanderfolgen sollen in der Zahlenreihe, so muß offenbar $a_1 = 1$ sein. Dies bewirkt zugleich, daß auch der Platz der drittgrößten Zahl der Zahlenreihe unseres Gebietes ausgefüllt wird, nämlich durch $\sum_2^r a_i - a_1$. Jetzt kann nur folgen $\sum_3^r a_i + a_1$, und zwar soll dann diese Zahl — als viertgrößte — um 3 kleiner sein als die größte $\sum_1^r a_i$, so daß folgt: $a_2 = 3$. — Wir nehmen nun an, es sei bereits bewiesen: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9, \ldots a_\varrho = 3^{\varrho-1}$, wobei wir bemerken, daß für $\varrho = 2$ dieser Nachweis ja soeben geführt ist. Wir werden zeigen, daß alsdann $a_{\varrho+1} = 3^\varrho$ ist. Zu dem Ende heben wir zunächst hervor, daß aus den bereits bestimmten $a_1, a_2 \ldots a_\varrho$ allein alle Zahlen von 1 bis einschließlich $\frac{3^\varrho - 1}{2}$, der Summe der $a_1, a_2 \ldots a_\varrho$, sich lückenlos im Sinne unseres Problems darstellen lassen und zwar jede nur auf eine Art. Daß nämlich die aus den so bestimmten $a_1 \ldots a_\varrho$ hergestellten algebraischen Summen auch wirklich lauter verschiedene Zahlen liefern, sieht man leicht: Wären 2 derselben einander gleich, so würde hieraus eine Gleichung von der Form $\sum k_i 3^i = 0$ folgen, wo die k_i die Werte $0, \pm 1, \pm 2$ hätten. Dann müßte aber $k_0 = 0$ sein, weil außer dem ersten jedes Glied der Summe durch 3 teilbar ist. Hiernach würde aber offenbar für k_1 dasselbe folgen, da alle anderen Glieder durch 3^2 teilbar sind, und so ginge es fort, womit die Unmöglichkeit einer solchen Gleichung und damit die eindeutige Darstellung der Zahlen $1, 2, \cdots \frac{3^\varrho - 1}{2}$ durch unsere $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ dargetan ist.[1]) — Man erhält nun aus $a_1, a_2, \ldots a_r$

1) Vgl. übrigens auch den Beweis S. 41/42.

nächst der größtmöglichen Zahl $\sum_1^r a_i = \sum_{\varrho+1}^r a_i + \sum_1^\varrho a_k$ die Reihe der sich daran anschließenden kleineren natürlichen Zahlen, indem man die erste Summe $\left(\sum_{\varrho+1}^r a_i\right)$ unverändert läßt, dagegen $\sum_1^\varrho a_k = \frac{3^\varrho - 1}{2}$ sukzessive ersetzt durch diejenigen Aggregate derselben a_k, die die nächst kleineren Werte haben, d. h. der Reihe nach $= \frac{3^\varrho - 3}{2}, \frac{3^\varrho - 5}{2}, \ldots 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots, -\frac{3^\varrho - 1}{2}$ sind, Addenden und Subtrahenden, die sich ja alle allein durch $a_1 \ldots a_\varrho$, der letzte in der Form $-\sum_1^\varrho a_i$, darstellen lassen. Man erhält so — mit positiven $a_r, a_{r-1}, \ldots a_{\varrho+1}$ — eine lückenlose Reihe der größten überhaupt erreichbaren Zahlen; unter ihnen die kleinste ist offenbar $a_r + \cdots + a_{\varrho+1} - a_\varrho - a_{\varrho-1} - \cdots - a_1$. Um dann die nächst kleinere zu erhalten, muß man offenbar bilden:

$$a_r + \cdots + a_{\varrho+3} + a_{\varrho+2} + a_\varrho + a_{\varrho-1} + \cdots + a_1.$$

Soll diese Zahl um 1 kleiner als die vorige sein, so muß aber

$$a_{\varrho+1} = 2(a_\varrho + a_{\varrho-1} + \cdots + a_1) + 1$$
$$= 2 \cdot \frac{3^\varrho - 1}{2} + 1 = 3^\varrho \text{ sein, was zu beweisen war.}$$

Das so — durch Schluß von ϱ auf $\varrho + 1$ — gewonnene Resultat[1]) sprechen wir folgendermaßen aus:

1) Eine eigentlich mathematische Behandlung erfuhr unser Problem zuerst durch eine in Gergonnes Annales de mathém. VIII, 1817/18, p. 164 gestellte diesbezügliche Frage. Die darauf von Coste, Durrande und einem ungenannten Abonnenten eingegangenen und von der Redaktion zu einem zusammenhängenden Artikel (l. c. p. 305—312) verarbeiteten Antworten erledigen das Problem insofern nicht, als sie von vornherein von der Annahme einer Potenzreihe ausgehen. Die von uns oben gegebene Darstellung nimmt Anlehnung an Clausen, „Über eine arithmetische Aufgabe", Crelles Journal VII, 1831, p. 30—31 und besonders an Schlegel „Die allgemeinen Grundlagen zweier Probleme aus der Unterhaltungs-Arithmetik", Hoppes Archiv XI, p. 93—100.

Sollen die Gewichte eines Gewichtssatzes so gewählt werden, daß mit denselben möglichst viele verschiedene Wägungen — bei 1 g. beginnend und von g. zu g. fortschreitend — unter Benutzung beider Schalen der Wage für die Gewichte ausgeführt werden können, so müssen die Gewichte untereinander alle verschieden sein und ihre Maßzahlen die Reihe der Potenzen von 3, von der nullten ab gerechnet, bilden.

Formuliert man die Aufgabe so, daß nur alle Wägungen eines gewissen Intervalls, etwa von 1 g. bis einschl. 100 g., mit einer Minimalzahl von Gewichten ausgeführt werden sollen, so erhält man neben der selbstverständlich auch dann noch bestehenden Lösung 1, 3, 9, 27, 81 noch zahlreiche andere, z. B. 1, 3, 7, 23, 69, überhaupt jede Reihe von 5 Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_5$, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$1)\ a_1 = 1; \quad 2)\ a_{i+1} \leqq 2 \cdot \sum_1^i a_k + 1 \ (i = 1, 2, 3, 4); \quad 3)\ \sum_1^5 a_k \geqq 100,$$

wobei jedoch auch diese Bedingungen nur hinreichend, nicht notwendig sind, wie z. B. die der ersten Bedingung nicht genügende Lösung 2, 3, 9, 27, 81 zeigt. Unter allen den vielen Lösungen ist jedoch die nach Potenzen von 3 fortschreitende insofern ausgezeichnet, als erstens ihre Verwendbarkeit am weitesten unter allen reicht, indem sie nur allein für alle Zahlen des Intervalls lückenlos noch genügt, wenn dieses über 100 hinaus bis 121 inkl. erweitert wird[1]), und zweitens dadurch, daß bei ihr allein jede Wägung von 1 g. bis zur Summe aller Gewichte auf eine und nur eine Art aus-

---

1) Verschiedene Autoren, wie Tartaglia, Bachet usw. und nach ihnen auch Schlegel (s. die vorige Anm.) setzen als obere Grenze des Intervalls von vornherein eine Zahl (40) von der besonderen Form $\frac{3^n - 1}{2}$ fest und erhalten nur aus diesem Grunde eine einzige Lösung. Wäre die obere Grenze des Intervalls z. B. 39, so würde man neben 1, 3, 9, 27 als zweite Lösung 2, 3, 9, 27 erhalten; diese letzte Reihe liefert sogar noch eine Darstellung von 41, dafür aber nicht mehr von 40.

führbar ist.[1]) Es besteht nämlich allgemein folgender Satz, der uns nach den obigen Ausführungen (S. 90—92) nicht mehr neu ist, vielmehr als das unmittelbare Resultat dieser bereits dort hätte formuliert werden können:

Die Reihe 1, 3, $3^2 \ldots 3^l$ *ist die einzige Reihe untereinander verschiedener ganzer Zahlen von der Eigenschaft, daß sich jede ganze Zahl in dem Intervall von* 1 *bis zur Summe der Zahlen der Reihe*[2]) *(unter Einschluß dieser Grenzen) auf eine und nur eine Art als Summe der Zahlen der Reihe, dieselben mit den Koeffizienten* $0, \pm 1$ *genommen, darstellen läßt.*

Folgende allgemeinere Frage ist von P. A. Mac Mahon aufgestellt und beantwortet worden[3]):

Auf wie viele Arten läßt sich eine ganze Zahl u *als Summe von untereinander gleichen oder verschiedenen Zahlen so darstellen, daß sich zugleich jede kleinere Zahl als* u *auf eine und nur eine Art als Summe durch diese Zahlen darstellen läßt („Perfekte Zerlegungen"); wie viele Zerlegungen sind möglich, wenn die Darstellungen nicht nur durch reine, sondern auch durch algebraische Summen geschehen dürfen („Subperfekte Zerlegungen")?*

Nehmen wir an, eine „perfekte" Zerlegung der Zahl u sei möglich durch l Zahlen λ, m Zahlen μ, n Zahlen ν usw., d. h. also

$$u = \underbrace{\lambda + \lambda + \cdots + \lambda}_{l} + \underbrace{\mu + \mu + \cdots + \mu}_{m} + \underbrace{\nu + \nu + \cdots + \nu}_{n} + \cdots,$$

so muß offenbar, da ja auch jede kleinere Zahl nur auf eine Art darstellbar sein soll, die Summe

$k_l \cdot \lambda + k_m \cdot \mu + k_n \cdot \nu \cdots$; $k_l = 0, 1, 2 \cdots l$; $k_m = 0, 1, 2 \cdots m$ usw.

alle Zahlen von 0 bis u und jede nur einmal liefern.

---

1) Mit der oben angeführten Reihe 1, 3, 7, 23, 69 würden wir z. B. für 4 zwei Darstellungen haben, ebenso auch schon für 3.

2) Diese Restriktion eines begrenzten Intervalls fehlt bei A. Schwidtal, „Die Darstellung aller Zahlen durch die Zahl 3", Beil. z. Progr. d. Gymn. zu Königshütte 1890, p. 13. In der dort angegebenen Form ist der Satz daher falsch, wie die unendliche Reihe 2, 3, 3^2, $3^3 \ldots$ zeigt, die für jede ganze Zahl eine und nur eine Darstellung in dem oben angegebenen Sinne ermöglicht.

3) P. A. Mac Mahon, „Certain special partitions of numbers", Quart. Journ. of mathem. XXI, 1886, p. 367—373. Vgl. a. von demselben: „The theory of perfect partitions of numbers and the compositions of multipartite numbers", The Messenger of Mathematics 20 (May 1890 — April 1891), p. 103—119.

Eine einfache Anzahlbestimmung liefert alsdann die Relation

(1) $$u+1=(l+1)(m+1)(n+1)\cdots.$$

Es sei nun $\lambda>\mu>\nu>\cdots$. Die Zahl $l\cdot\lambda$ stellt sich, da für jede Zahl nur eine Darstellung bestehen soll, nur in der Form $\underbrace{\lambda+\lambda+\cdots+\lambda}_{l}$ dar.

Die Darstellung der Zahlen $1, 2\cdots\lambda-1$ muß jedoch noch ohne eine der Zahlen λ möglich sein, dagegen darf sich λ nicht durch die übrigen Zahlen μ, ν ... darstellen lassen. Es ist daher keinesfalls möglich, die Zahl $l\lambda+\lambda$ noch darzustellen, da dies nur möglich wäre, wenn für λ außer der Darstellung $\lambda=\lambda$ noch eine zweite existierte; die größte noch darstellbare Zahl kann also höchstens $=l\lambda+\lambda-1$ sein, andererseits muß aber diese letztere Zahl stets noch darstellbar sein, da $l\lambda$ sich durch die λ allein und die Zahlen $1, 2\ldots\lambda-1$ sich ohne die λ — allein durch die $\mu,\nu\ldots.$ — darstellen, d. h. also $u=l\lambda+\lambda-1$ oder

(2) $$u+1=(l+1)\lambda, \text{ also wegen (1)}$$

(1') $$\lambda=(m+1)(n+1)\cdots.$$

Diese Gleichung entspricht übrigens der Gleichung (1) und ist auch unabhängig von (1) und (2) die direkte Folge der Tatsache, daß die $\lambda-1$ Zahlen $1, 2, \ldots\lambda-1$ durch die m Zahlen μ, die n Zahlen ν usw., jede auf eine Art, darstellbar sein müssen. Aus diesem Umstande folgt nun auch weiter — ganz analog wie oben — die der (2) entsprechende Gleichung

(2') $$\lambda=(m+1)\mu,$$

und offenbar geht dies so fort. Wir haben somit folgende Relationen für perfekte Zerlegungen gewonnen:

$$\begin{aligned} u &= l\lambda+m\mu+n\nu+\cdots\\ u+1 &= (l+1)\lambda\\ \lambda &= (m+1)\mu\\ \mu &= (n+1)\nu\\ \nu &= (r+1)\varrho\\ &\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots, \end{aligned}$$

nach denen sich die Bestimmung der verschiedenen Zerlegungen stets sehr leicht ausführen läßt.

Ist beispielsweise $u=23$, also $u+1=24$, so erhalten wir folgende Zerlegungen:

I. $\lambda=12$, $l=1$.

a) $\mu=6$, $m=1$.

1) $\nu=3$, $n=1$; $\varrho=1$, $r=2$.

2) $\nu = 2,\ n = 2;\ \varrho = 1,\ r = 1.$
3) $\nu = 1,\ n = 5.$

b) $\mu = 4,\ m = 2.$
1) $\nu = 2,\ n = 1;\ \varrho = 1,\ r = 1.$
2) $\nu = 1,\ n = 3.$

c) $\mu = 3,\ m = 3;\ \nu = 1,\ n = 2.$

d) $\mu = 2,\ m = 5;\ \nu = 1,\ n = 1.$

e) $\mu = 1,\ m = 11.$

II. $\lambda = 8,\ l = 2.$

a) $\mu = 4,\ m = 1.$
1) $\nu = 2,\ n = 1;\ \varrho = 1,\ r = 1.$
2) $\nu = 1,\ n = 3.$

b) $\mu = 2,\ m = 3;\ \nu = 1,\ n = 1.$

c) $\mu = 1,\ m = 7.$

III. $\lambda = 6,\ l = 3.$

a) $\mu = 3,\ m = 1;\ \nu = 1,\ n = 2.$

b) $\mu = 2,\ m = 2;\ \nu = 1,\ n = 1.$

c) $\mu = 1,\ m = 5.$

IV. $\lambda = 4,\ l = 5.$

a) $\mu = 2,\ m = 1;\ \nu = 1,\ n = 1.$

b) $\mu = 1,\ m = 3.$

V. $\lambda = 3,\ l = 7;\ \mu = 1,\ m = 2.$

VI. $\lambda = 2,\ l = 11;\ \mu = 1,\ m = 1.$

VII. $\lambda = 1,\ l = 23.$

Schreiben wir die Zerlegung von u kurz in der Form $l \cdot \lambda + m \cdot \mu + n \cdot \nu + \cdots$, so haben wir also für 23 folgende 20 perfekte Zerlegungen erhalten:

1) $1 \cdot 12 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1$
2) $1 \cdot 12 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
3) $1 \cdot 12 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 1$
4) $1 \cdot 12 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
5) $1 \cdot 12 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1$
6) $1 \cdot 12 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1$
7) $1 \cdot 12 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
8) $1 \cdot 12 + 11 \cdot 1$
9) $2 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
10) $2 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1$
11) $2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
12) $2 \cdot 8 + 7 \cdot 1$
13) $3 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1$
14) $3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
15) $3 \cdot 6 + 5 \cdot 1$
16) $5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
17) $5 \cdot 4 + 3 \cdot 1$
18) $7 \cdot 3 + 2 \cdot 1$
19) $11 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
20) $23 \cdot 1.$

Wenden wir uns nun zweitens zu den „subperfekten" Zerlegungen und ist $u = l \cdot \lambda + m \cdot \mu + n \cdot \nu + \cdots$; $\lambda > \mu > \nu > \cdots$ eine solche, so liefert die Summe

$$k_l \cdot \lambda + k_m \cdot \mu + k_n \cdot \nu + \cdots; \quad \begin{array}{l} k_l = -l, -l+1 \cdots -1, 0, +1 \cdots l \\ k_m = -m, -m+1 \cdots -1. 0. +1 \cdots m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

offenbar alle Zahlen von $-u$ bis $+u$, und zwar jede gerade einmal. Es muß also

(I) $$2u + 1 = (2l + 1)(2m + 1)(2n + 1) \cdots \text{ sein.}$$

Wir denken uns nun zu allen diesen Darstellungen der Zahlen $-u$ bis $+u$ die Gleichung $u = l \cdot \lambda + m \cdot \mu + n \cdot \nu \cdots$ addiert; dadurch verschieben wir die ganze bisher teils im Negativen, teils im Positiven liegende Darstellung ausschließlich in das Gebiet der positiven Zahlen, und wir erhalten so offenbar eine Darstellung der Zahlen $0, 1, 2, \ldots u$, $u+1, u+2, \cdots 2u$ durch reine (nicht algebraische) Summen aus $2l$ Zahlen λ, $2m$ Zahlen μ usw., und zwar für jede dieser Zahlen gerade eine solche Darstellung. Wir haben also eine perfekte Zerlegung der Zahl $2u$ und es ist daher nach (2)

(II) $$2u + 1 = (2l + 1)\lambda$$

und nach (I) und (II)

(I') $$\lambda = (2m + 1)(2n + 1) \cdots.$$

Da ferner für die Zahlen $1, 2 \ldots \lambda - 1$ perfekte Zerlegungen mittels der $2m$ Zahlen μ, der $2n$ Zahlen ν usw. bestehen müssen, so folgt entsprechend der früheren Gleichung (2') jetzt:

(II') $$\lambda = (2m + 1)\mu,$$

und weiter analog

(II'') $$\mu = (2n + 1)\nu \text{ usw.}$$

Auf grund der Formeln (I), (II), (II'), (II'') usw. ist es nun leicht, alle subperfekten Zerlegungen einer vorgelegten Zahl anzugeben.

Man beachte, daß nach (II), (II') usw. die Zahlen $\lambda, \mu, \nu \ldots$ stets ungerade sind und daß hieraus wegen $u = l \cdot \lambda + m \cdot \mu + n \cdot \nu \cdots$ folgt: $u \equiv (l + m + n + \cdots) \bmod. 2$. Jede Zahl stellt sich bei subperfekten Zerlegungen also durch lauter ungerade Summanden dar, und zwar durch eine gerade oder ungerade Anzahl solcher, je nachdem die Zahl selbst gerade oder ungerade ist.

Als Beispiel einer subperfekten Zerlegung betrachten wir den Bachetschen Fall $u = 40$:

$2u + 1 = 81$.

I. $\lambda = 27$, $l = 1$.

a) $\mu = 9$, $m = 1$.

1) $\nu = 3$, $n = 1$; $\varrho = 1$, $r = 1$.

2) $\nu = 1$, $n = 4$.

b) $\mu = 3$, $m = 4$; $\nu = 1$, $n = 1$.

c) $\mu = 1$, $m = 13$.

II. $\lambda = 9$, $l = 4$.

a) $\mu = 3$, $m = 1$; $\nu = 1$, $n = 1$.

b) $\mu = 1$, $m = 4$.

III. $\lambda = 3$, $l = 13$; $\mu = 1$, $m = 1$.

IV. $\lambda = 1$, $l = 40$.

Für die Zahl 40 existieren also folgende 8 subperfekte Zerlegungen:

1) $1 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1$
2) $1 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 4 \cdot 1$
3) $1 \cdot 27 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1$
4) $1 \cdot 27 + 13 \cdot 1$
5) $4 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1$
6) $4 \cdot 9 + 4 \cdot 1$
7) $13 \cdot 3 + 1 \cdot 1$
8) $40 \cdot 1$.

Für die erste dieser Zerlegungen ist also $l + m + n + r$ ein Minimum, wie wir bereits bei dem Gewichtsproblem gesehen hatten.

§ 5. Gergonnes Haufenproblem.

Unter den „Problèmes plaisants" Bachets[1]) findet sich noch ein Kartenerratespiel, das zu den in § 3 behandelten Spielen dieser Art eine gewisse Verwandtschaft besitzt. Die Spielregel ist folgende: **Man nehme 27 Karten und lasse eine Person sich davon eine denken. Dann nehme man die zu einem Haufen zusammengelegten Karten der Reihe nach von oben nach unten ab, zeige sie, ohne sie selbst anzusehen, der anderen Person und lege**

1) Bachet, 4. Ausg., 1879, p. 72, Problème XVIII (p. 143 der Ausgabe von 1624).

sie mit der Bildseite nach unten hin, und zwar in 3 Haufen, so daß die erste zum ersten, die zweite zum zweiten, die dritte zum dritten, die vierte wieder zum ersten usw. Haufen kommt. Dann frage man die andere Person, in welchen Haufen die gedachte Karte gekommen ist, und lege hierauf die 3 Haufen wieder zu einem zusammen, den ersten zu oberst, dann den zweiten und den dritten zu unterst. Dann ordne man wieder die Karten nach demselben Verfahren in 3 Haufen an, frage wieder nach dem Haufen der gedachten Karte und mache schließlich dasselbe noch ein drittes Mal, worauf man in der Lage ist, die gedachte Karte anzugeben.

Eine allgemeinere mathematische Behandlung dieses Spiels wurde zuerst von Gergonne gegeben[1]), nach dem man daher das Spiel auch benannt hat. — Kommt die Karte bei der ersten Anordnung in Haufen in den a-ten, so ist ihre Rangziffer in dem nachher zu bildenden Haufen aller 27 zwischen $(a-1)9+1$ und $a \cdot 9$ gelegen, wenn der Rang von oben ab gerechnet wird. Bei der zweiten Haufenbildung kommen nun von den ersten $(a-1)9$ Karten je $(a-1)3$ in jeden der 3 Haufen, und zwar zu unterst; darüber kommen in jeden der 3 Haufen je 3 Karten, und unter diesen befindet sich die gedachte. In ihrem Haufen liegen also mindestens $(a-1)3$ und höchstens $(a-1)3+2$ Karten unter ihr, d. h. sie ist, von oben gerechnet, in ihrem Haufen die $[9-(a-1)3]$-te bis $[7-(a-1)3]$-te; liegt sie also jetzt im Haufen b, so ist beim erneuten Zusammenlegen der 3 Haufen ihre Rangziffer, von oben gerechnet, zwischen $(b-1)9+9-(a-1)3$ und $(b-1)9+7-(a-1)3$ gelegen oder einfacher geschrieben: zwischen $9b-3a+3$ und $9b-3a+1$. Jetzt kommen in jeden Haufen zu unterst $3b-a$ Karten, unter denen sich die gedachte Karte noch nicht befindet, doch ist sie dann die $[3b-a+1]$-te, von unten gerechnet, in einem der Haufen Von oben gerechnet ist sie also in ihrem Haufen die

1) „Recherches sur un tour de cartes", Annales de mathématiques rédigées par Gergonne, t. IV, 1813/14, p. 276—283.

$[9 - 3b + a]$-te, und wenn sie im Haufen c jetzt liegt, so wird sie beim Zusammenlegen der 3 Haufen die $[(c-1)9 + 9 - 3b + a]$- oder $[9c - 3b + a]$-te Karte überhaupt, gleichfalls von oben gerechnet. Aus den Nummern a, b, c ihrer sukzessiven Haufen ist man demnach leicht in der Lage, sie selbst zu bestimmen; ja sogar ein Blinder könnte, wie Gergonne[1]) bemerkt, dies Kunststück ausführen und würde damit jedenfalls allgemeine Verwunderung erregen: *Man braucht nur, wenn sich die Karte der Reihe nach in den Haufen a, b, c befindet, von dem aus der dritten Anordnung hervorgehenden ganzen Haufen die $(9c - 3b + a)$-te Karte zu nehmen.*

Gergonne hat dies Problem dahin verallgemeinert, daß m^m Karten in m Haufen zu je m^{m-1} angeordnet werden. Kommt eine bestimmte Karte hierbei zunächst in den Haufen n_1, so liegt ihre Rangziffer — von oben gerechnet — beim ersten Zusammenlegen zwischen $(n_1 - 1)\,m^{m-1} + 1$ und $n_1 \cdot m^{m-1}$. Bei der zweiten Anordnung kommen also zuunterst in jeden Haufen $(n_1 - 1)\,m^{m-2}$ Karten, ohne daß die betreffende Karte darunter ist; dagegen ist sie unter den nächsten m^{m-2} Karten eines der m Haufen. Unter ihr liegen in ihrem Haufen also mindestens $(n_1 - 1)m^{m-2}$ und höchstens $n_1 m^{m-2} - 1$ Karten; sie ist also von oben die $[m^{m-1} - n_1 m^{m-2} + 1]$- bis $[m^{m-1} - (n_1 - 1)m^{m-2}]$-te Karte ihres Haufens. Ist sie nun im Haufen n_2, so liegt bei nochmaligem Zusammenlegen ihre Rangziffer in bezug auf den ganzen Haufen, von oben gerechnet, zwischen $n_2 m^{m-1} - n_1 m^{m-2} + 1$ und $n_2 m^{m-1} - n_1 m^{m-2} + m^{m-2}$. Durch vollständige Induktion findet man leicht, daß die Rangziffer der betreffenden Karte beim letzten, also m-ten Zusammenlegen sich durch folgende Formeln aus den Nummern $n_1, n_2, n_3 \ldots$ ihrer sukzessiven Haufen bestimmt:

I. $m = 2k$; $\quad x = n_m m^{m-1} - n_{m-1} m^{m-2} + n_{m-2} m^{m-3} - \ldots + n_2 m - n_1 + 1$;

II. $m = 2k+1$; $\quad x = n_m m^{m-1} - n_{m-1} m^{m-2} + n_{m-2} m^{m-3} - \ldots + n_2 m^2 - n_2 m + n_1$.

Selbstverständlich kann man es hiernach auch erreichen, eine bestimmte Karte am Schluß an bestimmter Stelle erscheinen zu lassen[2]), indem man bei jedem Zusammenlegen die

1) L. c. p. 283.

2) In dieser Form findet sich unser Spiel u. a. behandelt bei Guyot, „Récréations physiques et mathématiques", 1769, t. II, p. 300 (Récréation 103); deutsche Ausg., Th. II, 1772, p. 292 ff.

Haufen in geeigneter Reihenfolge zusammenlegt, oder vielmehr, indem man dem die betreffende Karte enthaltenden Haufen jedesmal die richtige Stelle anweist, da die Reihenfolge der übrigen Haufen offenbar irrelevant ist. Soll z. B. in dem Fall der 27 Karten die gedachte zum Schluß gerade in der Mitte[1]), d. h. als 14-te, liegen, so muß also $9c - 3b + a = 14$ sein. Hieraus folgt, daß $14 - a$ durch 3 teilbar sein muß, oder, da a, b, c positiv und $\leqq 3$ sind: $a = 2$; entsprechend folgt jetzt: $4 + b$ durch 3 teilbar, $b = 2$, schließlich: $a = b = c = 2$. *Es muß also dreimal derjenige Haufen, welcher als der die betreffende Karte enthaltende bezeichnet ist, in die Mitte genommen werden, wenn die gesuchte Karte zum Schluß selbst die mittelste, d. h. 14-te, sein soll.*[2]) — Eine anschauliche Vorstellung des so festgesetzten Verfahrens mag Fig. 11 geben: die mit Kreuz bezeichneten Karten mögen die 9 Karten desjenigen Haufens sein, in dem die gedachte Karte nach der ersten Dreihaufenanordnung der Karten sich befand, und die Figur soll den Zustand nach der zweiten Haufenanordnung veranschaulichen. + sei dabei die gedachte Karte. Nunmehr wäre also Haufen III in die Mitte zu nehmen und nach der dritten und letzten Haufenanordnung würden dann die Karten des jetzigen Haufen III (Fig. 11) die 9 Stellen einnehmen, die in der Figur mit + bezeichnet sind, und zwar die 3 Karten

—	—	—
—	—	—
—	—	—
+	+	+
+	+	+
+	+	+
—	—	—
—	—	—
—	—	—
I	II	III

Fig. 11.

1) In dieser Form bei Bachet, l. c.; ebenso bei Schwenter, „Deliciae physico-mathematicae", 1636, p. 52 f.; s. dazu hier, nächste Seite nebst Anm. 2 u. 3.

2) In dem allgemeinen Falle der m^m Karten (s. Formeln I, II) ergeben sich die $n_1, n_2 \ldots$ natürlich auch leicht und eindeutig aus gegebenem x. — Umgekehrt ergibt bei ungeradem m (Formel II) für

$$n_1 = n_2 = n_3 \cdots = n_m = \frac{m+1}{2} \text{ sich } x = \frac{m^m+1}{2}.$$

Auch in dem allgemeinen Falle von m^m in m Haufen angeordneten Karten (m ungerade) erscheint also die gedachte Karte schließlich in der Mittellage, wenn man den sie enthaltenden Haufen nach jeder Haufenanordnung stets in die Mitte nimmt.

+ + + von III (Fig. 11) gerade die mittlere Zeile + + + der Figur. Die gedachte Karte + würde in dieser Reihe an letzter Stelle, also in dem neuen Haufen III liegen; dieser ist dann aber in die Mitte zu nehmen und so gelangt die gedachte Karte gerade auf das Mittelfeld.

Es ist sofort zu sehen, daß dies Spiel in gleicher Weise sich mit anderen Anzahlen von Karten ausführen läßt und weder an unsere Zahl 27 noch an die allgemeinere m^m (bei beliebigem ungeradzahligem Wert von m) gebunden ist. So findet man das Spiel denn in der Literatur[1]), um ein Beispiel zu nennen, häufig mit 21 Karten (3 Haufen zu je 7 Karten) besprochen; die unserer Figur 11 entsprechende Figur wäre als-

−	−	−
−	−	−
+	+	−
+	+	+
−	+	+
−	−	−
−	−	−
I	II	III

Fig. 12.

−	−	−	−	−
−	+	+	+	−
−	−	−	−	−
I	II	III	IV	V

Fig. 13.

dann, wenn wir von besonderer Markierung der gedachten Karte unter den 7 Kreuzen absehen, Fig. 12.

Übrigens ist der von Bachet behandelte Fall auch nicht unser[2]) von 27, sondern der von $3 \cdot 5$ Karten[3]), und zwar werden diese dort gleichfalls in 3 Haufen angeordnet. Ordnen wir sie

---

1) Z. B. in dem Buch von Witgeest (1718; s. liter. Index), p. 290/1.

2) In den neuen Bachet-Ausgaben hat der Herausgeber Labosne dann dem Problem eine ausführlichere und vor allem auch allgemeiner gehaltene Betrachtung gewidmet und dabei auch unseren Fall der 27 Karten erörtert (4. Ausg., 1879, p. 74 ff.).

3) Derselbe Fall bei Schwenter, wo außerdem (l. c. p. 54–56) das Spiel für den Fall einer geraden Anzahl von Haufen, jeder mit gerader Kartenanzahl, (2×8), besprochen ist: die gedachte Karte wird in diesem Falle auf den untersten Platz eines Haufens gebracht.

dagegen in 5 Haufen zu je 3 an, so wären zum Erraten der gedachten Karte nur zwei Haufenanordnungen nötig, wie die Fig. 13 sofort zeigt, die der vorigen analog gezeichnet ist.

Mit zwei Haufenanordnungen wird man so lange auskommen, als k, die Anzahl der Karten jedes Haufens, $\leqq h$, Anzahl der Haufen, ist; denn offenbar kommen durch die zweite Haufenanordnung alle mit Kreuz bezeichneten Karten in die Mittelzeile und die gedachte Karte selbst also demnächst in die Mittellage, wenn sie diese nicht schon inne hat. Würde man übrigens versehentlich eine dritte überzählige Haufenanordnung noch vornehmen, so würde dies nichts ausmachen, da die einmal in die Mittellage gelangte Karte auch bei der neuen Anordnung darin verbleibt, weil ja ihr Haufen in der Mittellage bleibt.

Drei Haufenanordnungen, wie wir sie für 27 und 21 Karten, jedesmal bei 3 Haufen, brauchten, sind in der Regel erforderlich, wenn $h < k \leqq h^2$ ist; denn in diesem Falle verteilen sich nach der zweiten Haufenanordnung die k „Kreuze" in der Regel auf mehr als 1, also wenigstens 2 und höchstens h Zeilen ihres Haufens.[1]) Ist aber $k > h^2$, so werden also mehr als drei Haufenanordnungen erforderlich; dies mag wenigstens auch an einem Beispiel illustriert werden, dem von 33 Karten in 3 Haufen: Fig. 14 ist den früheren ganz analog gebildet und zeigt deutlich, daß die gedachte Karte (+) nach der nächsten Haufenanordnung noch nicht in die Mittelzeile, sondern nur in eine der Mittelzeile benachbarte Zeile rückt und erst dann nach abermaliger Haufenanordnung in die Mittelzeile und damit dann nach Vertauschung der Haufen in die Mittellage. Nach der zweiten Haufenanordnung verteilen sich hier eben die „Kreuze" eventuell auf 4 (also mehr als $h = 3$) Zeilen ihres Haufens

—	—	—
—	—	—
—	—	—
+	—	—
+	+	+
+	+	+
+	+	+
—	—	+
—	—	—
—	—	—
—	—	—
I	II	III

Fig. 14.

1) Siehe Näheres bei Labosne, Bachet-Ausgabe, l. c. p. 77.

und deshalb muß eine weitere Verteilung dieser 4 „Kreuze“ auf die 3 Haufen erfolgen.

Mit der Betrachtung dieser speziellen Beispiele wollen wir uns hier begnügen. Der allgemeine Fall von p Haufen zu je q Karten ist von Dr. C. T. Hudson[1]) behandelt worden; eine Berichtigung dieser Untersuchungen hat L. E. Dickson[2]) gegeben.

---

1) Hudson, Educ. Times Repr. 1868, IX, p. 89—91. Siehe a. einen neueren Artikel von A. H. Dingler (liter. Index).

2) Bulletin of the Amer. Mathem. Soc., 2nd series, vol. I, 1895, p. 184—186.

Kapitel IV.

Umfüllungsaufgaben.

La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

Poisson.
Siehe Arago, Oeuvres, t. 2, 1854, p. 662.

§ 1. Literatur und Geschichte der Aufgabe; ihre älteste Form und deren Lösungen.

Bereits in den aus der Mitte des dreizehnten Jahrhunderts stammenden „Annales Stadenses“[1]), die uns schon in Kap. I (S. 1, Anm. 2) begegnet sind, sowie in der dort gleichfalls zitierten Aufgabensammlung[2]) von 1484, die dem Franzosen Nicolas Chuquet zugeschrieben wird, findet sich folgende Aufgabe:

Ein Diener wird von seinem Herrn in die nächste Stadt geschickt, um 8 Maß Wein zu holen. Als er kaum mit seinem gefüllten Gefäß die Stadt verlassen hat, begegnet ihm ein zweiter Diener, der für seinen Herrn gleichfalls Wein holen soll. „Wieviel Wein hast Du?“ fragt dieser jenen. — „8 Maß“. — „Ich soll auch Wein holen.“ — „Du wirst keinen bekommen, da keiner mehr da ist“ Nun bittet der zweite Diener den ersten, seinen Wein mit ihm zu teilen; er habe zwei Gefäße,

1) „Monumenta Germaniae historica“, l. c. p. 333. Daß diese vorwiegend durch ziemlich rohes Kompilieren entstandenen Annalen die erste Quelle unserer Aufgabe überhaupt sein sollten, ist allerdings wenig wahrscheinlich.

2) Aufgabe 165 der Sammlung („Le jeu du tavernier“), l. c. p. 460. Dort finden sich die beiden Lösungen der Aufgabe richtig angegeben, wie bei uns am Ende dieses Paragraphen, während die „Annales Stadenses“ nur die erste der beiden geben.

eins von 5, das andere von 3 Maß bei sich. — Wie läßt sich unter alleiniger Benutzung dieser drei Gefäße die Teilung ausführen?[1])

Unzählige Male ist die Aufgabe seitdem wieder gestellt: wir finden sie im 16. Jahrhundert bei Nicolò Tartaglia in dessen gleichfalls in Kap. I (a. a. O.) schon zitiertem „General trattato di numeri, et misure" (1556)[2]), dem für lange Jahre unerreicht besten Handbuche der Mathematik der damaligen Zeit, und die Einkleidung, die sie in dem Werke des bekanntlich als Plagiator unrühmlich dastehenden italienischen Mathematikers hat, ist diese: „Zwei Männer haben eine Flasche mit 8 Unzen Balsam geraubt und, da sie zum Teilen kein Maß haben und die Zeit drängt, so kaufen sie von einem Glashändler noch ein Gefäß, das 5 Unzen hält, und eins für 3. In einen sicheren Schlupfwinkel zurückgezogen, wollen sie nun teilen." Auch Tartaglias Zeitgenosse Pierre Forcadel soll sich mit unserer Aufgabe beschäftigt haben[3]); wir finden sie dann später natürlich in Bachets „Problèmes plaisants et délectables" (1612) und in der ganzen späteren Literatur.

Nicht ohne Gewinn für die mathematische Wissenschaft ist unsere Aufgabe so oft gestellt und aufgegeben worden; denn wenn wir einer Erzählung Aragos[4]) Glauben schenken dürfen, ist sie es, die der Mathematik um die Wende des 18. Jahrhunderts eine ihrer ersten Koryphäen zugeführt hat:

1) Die Einkleidung der Aufgabe ist die der „Annales Stadenses".

2) La prima parte del General Trattato di numeri, et misure di Nicolò Tartaglia, Vinegia 1556, Libro XVI, art. 182, fol. 255v.

3) Forcadel soll geglaubt haben, die Aufgabe sei nur dann lösbar, wenn das große Gefäß genau so viel Inhalt habe wie die beiden kleineren zusammen, und Bachet bewies jedenfalls durch die von ihm gegebenen Beispiele, daß diese Bedingung nicht notwendig sei. Die betreffende Stelle bei Forcadel ist mir nicht bekannt; in seiner einbändigen „Arithmetique" von 1573 steht von unserem Problem anscheinend überhaupt nichts. Ich entnehme die vorstehende Notiz über ihn vielmehr der „Recreation mathematique" von Leurechon, Ausg. 1627, p. 24; vgl. a. das damit zusammenhängende Werk von Claude Mydorge, Ausg. 1639, p. 34.

4) Oeuvres, t. 2, 1854. p. 596 = Werke, Bd. 2, p. 487.

Einem jungen Franzosen, der bis dahin keinerlei besondere geistige Fähigkeiten verraten hatte, der vielmehr nach Ansicht seiner Familie für das ursprünglich für ihn in Aussicht genommene Notariat nicht genug Verstand besaß, auch als Chirurgenschüler eines Verwandten nur Mißerfolge aufzuweisen gehabt hatte, wurde auf einer Reise zufällig unsere Aufgabe vorgelegt. Poisson — denn um ihn handelt es sich — gab nach Aragos Erzählung augenblicklich die Lösung an und erkannte so seinen wahren Beruf, für den er dann in der Folge je länger, je mehr eine Begeisterung faßte, die einer Steigerung nicht mehr fähig zu sein scheint und die nicht besser als durch das Wort von ihm, das wir an den Anfang dieses Kapitels gesetzt haben, gekennzeichnet werden kann.

Um eine Lösung unserer Aufgabe zu finden, wollen wir ein schon von Bachet[1]) benutztes Schlußverfahren anwenden, das wir in möglichster Anlehnung an den Text seines Werkes, wie folgt, wiedergeben: „Da es zur Teilung von 8 Litern[2]) in 2 gleiche Teile nötig ist, daß man auf der einen Seite 4 und auf der anderen gleichfalls 4 hat, und man diese 4 nur in dem zweiten oder in dem ersten[3]) Gefäß bekommen kann, so muß man entweder das eine oder das andere zu erreichen suchen. Hiernach ergeben sich 2 verschiedene Wege. Um den ersteren einzuschlagen, schließe ich folgendermaßen: Um zu bewirken, daß in dem zweiten Gefäß gerade 4 Liter bleiben, muß man von diesem Gefäß, wenn es voll ist, gerade 1 Liter fortnehmen: Dies kann aber nur so ausgeführt werden, daß man jenes Liter in eines der beiden anderen Gefäße gießt, wenn demselben nur noch ein Liter fehlt, um voll zu sein; dies kann bei dem ersten Gefäß nicht vorkommen

1) „Problèmes plaisants et delectables", 4. Ausg., 1879, p. 139 (p. 206 der 2. Ausg. von 1624).

2) Wir wählen hier, wie auch weiterhin in diesem Kapitel, stets dieses jetzt gebräuchlichste Hohlmaß statt der sonst bei dieser Aufgabe in der Literatur vorkommenden Einheiten.

3) Unter dem „ersten" Gefäß ist das Achtliter-, unter dem „zweiten" das Fünfliter- und unter dem „dritten" das Dreilitergefäß zu verstehen.

(denn, wenn das zweite voll wäre und dem ersten nur noch ein Liter fehlen sollte, um auch voll zu sein, so würde dies schon 12 Liter erfordern); es muß also das dritte Gefäß dasjenige sein, dem nur noch ein Liter fehlen soll, um voll zu sein, d. h. also: es müssen in ihm 2 Liter enthalten sein. Dieser Zustand kann nun auf 2 Arten erreicht werden: 1) indem dem vollen dritten Gefäß ein Liter genommen oder 2) indem in das leere dritte Gefäß 2 Liter gegossen werden. Der erste Fall ist unmöglich, denn dann müßte ja einem der beiden anderen Gefäße gerade nur noch ein Liter fehlen, was wir ja bei dem zweiten Gefäß gerade erstreben, also noch nicht voraussetzen dürfen und was bei dem ersten Gefäß auch nicht möglich ist, weil dann gegen die Voraussetzung im ersten Gefäß 7 und im dritten 3, also im ganzen 10 Liter Wein vorhanden wären. Es bleibt also nur der zweite Weg, d. h. es müssen in das dritte Gefäß zwei Liter gegossen werden. Diese zwei Liter können aber nicht aus dem ersten Gefäß kommen (denn wenn bei leerem drittem Gefäß das erste nur 2 Liter enthielte, so könnten, auch wenn das zweite ganz voll wäre, nur 7 Liter Wein gegen die Voraussetzung vorhanden sein); die 2 Liter müssen also aus dem zweiten Gefäß kommen. Um nun zu bewirken, daß in dem zweiten Gefäß gerade 2 Liter sind, muß man, wenn es voll ist, 3 Liter davon abnehmen, was sehr leicht ist, da wir ja ein Dreilitergefäß haben. Geht man umgekehrt diesen Weg, so wird man die erste Lösung der Aufgabe finden." Ein entsprechendes Raisonnement gibt Bachet dann für die zweite Methode, jedoch verzichten wir auf Wiedergabe desselben und geben einfach die beiden Lösungen[1]) unserer Aufgabe in folgendem, leicht verständlichen Schema:

---

1) Von einer dieser beiden Lösungen ressortiert jede weitere in der Weise, daß Übergänge, die direkt hätten erfolgen können, auf dem Umwege über andere entbehrliche Zwischenstationen erfolgen; vgl. die Liste der Lösungen bei Brunel, der seine von uns in Kap. XI, § 15 skizzierte Methode auch auf dieses Problem anwendet, Mém. de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux (4) V (1895), Extraits des procès-verbaux des séances, 1893—94, p. XIV—XV.

1)

A (8)	*B* (5)	*C* (3)
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

2)

A (8)	*B* (5)	*C* (3)
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

§ 2. Allgemeine Methoden für die Zweiteilung.

Die Aufgabe, die der junge Poisson nach Aragos Erzählung zu lösen hatte, wurde nicht genau in derselben Form gestellt, wie sie sich in der von uns zitierten ältesten Literatur findet und wie wir sie hier im vorigen Paragraphen behandelt haben, vielmehr betrugen, wenn auch im übrigen alles dasselbe bleibt, die Inhalte der 3 Gefäße statt 8, 5, 3: 12, 8, 5 Liter. Auch diese Aufgabe besitzt, wie wir sehen werden, 2 Lösungen, von denen die eine ebenso einfach ist, d. h. ebensowenig Operationen erfordert wie die Lösung 1) unserer Aufgabe, während allerdings die andere Lösung sich umständlicher gestaltet.

Wir werden so dazu geführt, unser Problem allgemeiner zu fassen und wollen gleich auf folgende Fragestellungen hinweisen: ist die Aufgabe auch noch lösbar, wenn die Inhalte der 3 Gefäße irgendwelche beliebigen sind, wenn ferner nicht zu gleichen Teilen, sondern in einem anderen Verhältnis geteilt werden soll, schließlich wenn nicht 3, sondern 4 resp. allgemein $p + 1$ Gefäße vorhanden sind und die ganze Menge etwa in 3 resp. p unter sich gleiche Teile geteilt werden soll? Die erste Erweiterung, d. h. die Aufgabe: „Gegeben sind 3 Gefäße A, B, C, welche bzw. a, b, c Liter halten: das Gefäß A ist mit Wein gefüllt, der mit Hilfe der anderen beiden leeren — kleineren oder höchstens ebenso großen — Gefäße in 2 gleiche Teile geteilt werden soll; wie ist die Teilung auszuführen?“

ist erledigt von dem Herausgeber von Bachets „Problemes" A. Labosne, der hierfür zwei Methoden gibt.[1])

Der Anfangszustand ist in schon oben angewandter Schreibweise a, 0, 0, wobei wir die Gefäßinhalte, wie auch weiterhin stets, in der Reihenfolge A, B, C angeben. In dieser Reihenfolge mögen zugleich die drei Gefäße A, B, C ihrer Größe nach geordnet sein: daß A jedenfalls nicht kleiner als eins der anderen, sondern wenigstens gleich dem größeren von diesen sein soll, ist bereits in der Aufgabe gesagt, und wir wollen von den anderen beiden, falls diese ungleich sind, das größere B nennen; wir haben also: $a \geqq b \geqq c$. Das Größenverhältnis zwischen B und C mag so sein, daß C q-mal aus dem vollen Gefäß B gefüllt werden könnte, zum $(q+1)^{\text{ten}}$ Male dagegen nicht mehr, d. h. also

$$q \cdot c \leqq b < (q+1) \cdot c,$$

wo $q \geqq 1$ ist. — Suchen wir nach diesen Vorbemerkungen eine Lösung unserer Aufgabe, so finden wir, daß als erste Manipulation nichts anderes übrig bleibt, als eins der Gefäße B und C aus A zu füllen; man erhält so: entweder $a-b$, b, 0 oder $a-c$, 0, c. Als zweite Operation könnte nun die Füllung des noch leeren Gefäßes aus A erfolgen[2]), doch hätte dies keinen Zweck, da alsdann bei vollen Gefäßen B und C nachher sofort das eine wieder in A entleert werden müßte, mithin 2 sich aufhebende Operationen ausgeführt würden; es muß also notwendig von den beiden Gefäßen B und C das volle in das noch leere gegossen werden resp. soviel davon, bis das andere voll ist. Wir haben hiernach alsdann folgende beiden Fälle:

$$1)\ a-b \quad b-c \quad c \qquad 2)\ a-c \quad c \quad 0.$$

Die Fortsetzung von 1) kann jetzt nur in der Weise erfolgen,

1) Bachet-Ausgabe, 4. Ausg., Paris 1879, p. 145.

2) Falls die vorhandene Weinmenge hierfür nicht mehr ausreicht, d. h. also, falls $a < b + c$ ist, so treten allerdings besondere Verhältnisse auf; wir wollen daher diesen Fall vorläufig ausnehmen, also annehmen: $a \geqq b + c$.

daß in das erste oder zweite Gefäß etwas gegossen wird, da das dritte Gefäß ja voll ist. Es bleiben sonach folgende vier Möglichkeiten:

α) Das erste Gefäß wird in das zweite entleert, so weit dies geht; hierdurch würde B gefüllt werden, da wir ja jetzt (Anm. 2, vorige Seite) annehmen wollten: $a \geqq b + c$. Wir hätten also hinterher den Fall, daß B und C voll sind und in A sich der Rest befindet, ein Fall, den wir schon oben als unbrauchbar abgetan haben.

β) Das zweite Gefäß wird in das erste entleert; dies führt zu $a - c$, 0, c, also einer Stellung, die in der Serie der Lösung 2) bereits überwunden war.

γ) Das dritte Gefäß wird in das zweite entleert; dies führt zu unserer vorigen Stellung zurück, hebt also die vorige Operation wieder auf. — Es bleibt somit allein übrig:

δ) Das dritte Gefäß wird in das erste entleert: $a - b + c$, $b - c$, 0. — Jetzt das zweite oder das dritte Gefäß aus dem ersten zu füllen oder das zweite in das erste zu entleeren, wären Operationen, die uns zu früheren Stellungen zurückführen würden; es bleibt also einzig übrig, das dritte Gefäß aus dem zweiten zu füllen resp., wenn der Vorrat $b - c$ hierfür nicht mehr ausreicht, d. h. unsere obige Größe $q = 1$ ist, den Rest $b - c$ in C zu gießen. Wir bekommen so die Stellungen

I) $a - b + c \quad b - 2c \quad c$ resp. II) $a - b + c \quad 0 \quad b - c$.

Im ersteren Falle ergeben sich wieder genau wie oben für die Fortsetzung an sich 4 Möglichkeiten α, β, γ, δ, von denen jedoch aus ganz denselben Gründen wie dort nur δ in Betracht kommt, so daß wir zu der Stellung

$$a - b + 2c \quad b - 2c \quad 0$$

geführt werden. Man sieht hiernach, wie dies fortzusetzen ist: Zunächst muß nun das zweite Gefäß von neuem in das dritte entleert werden und dieses dann wieder, wenn es voll ist, in das erste und so im ganzen q-mal. Alsdann ist entweder das zweite Gefäß leer ($b = q \cdot c$) oder ($b > q \cdot c$) es enthält noch

einen gewissen Rest und wird nunmehr zum $(q+1)^{ten}$ Male entleert in das dritte Gefäß, das von diesem Rest jedoch nur teilweise gefüllt wird. Dieser Zustand war für $q = 1$ bereits oben durch die Stellung II) erreicht; in jedem Falle kommen wir also zu der Stellung

$$a - b + q \cdot c \qquad 0 \qquad b - q \cdot c.$$

Falls nicht etwa eine der schon erlangten Stellungen die gewünschte Teilung in 2 gleiche Teile bereits geliefert hat, wird man in dieser Weise fortzufahren haben. — Die Fortsetzung unseres Schlußverfahrens würde zeigen, daß man nun wieder von neuem dieselben Operationen auszuführen hat, d. h. B von neuem aus A füllen und es dann sukzessive in C entleeren muß. Man kommt so der Reihe nach zu den Stellungen:

$$\begin{array}{lll} a-2b+qc & b & b-qc \\ a-2b+qc & 2b-(q+1)c & c \\ a-2b+(q+1)c & 2b-(q+1)c & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a-2b+(2q-1)c & 2b-2qc & c \\ a-2b+2qc & 2b-2qc & 0. \end{array}$$

Je nachdem $2b - 2qc \gtrless c$ ist, wird C nun nochmals ganz oder nur teilweise gefüllt. — In dieser Weise geht dies fort; die Mengen, die hierbei in B auftreten, waren zunächst von der Form $b - ic$; $i = 1, 2 \ldots q$, dann von der Form $2b - ic$; $i = 1, 2 \ldots 2q$ resp. $2q + 1$. Jetzt würden sich Ausdrücke von der Form $3b - ic$; $i = 1, 2 \ldots 3q$ oder $3q + 1$ resp. $3q + 2$ ergeben usf. Allgemein erhält man so Ausdrücke von der Form $mb - nc$.

Ganz entsprechend ist es im Falle 2) (s. oben), nur daß man dort fortgesetzt das dritte Gefäß aus dem ersten zu füllen und dann den Inhalt des dritten in das zweite zu gießen hat so lange, bis dieses voll ist, worauf das zweite in das erste Gefäß entleert wird und den im allgemeinen in dem dritten noch verbliebenen Rest aufnimmt. Die hier auftretenden Aus-

drücke sind von der Form $n'c - m'b$. — Das eine Verfahren bildet also die Umkehrung des anderen, wie deutlicher noch folgende Gegenüberstellung zeigen mag:

Verfahren 1.	Verfahren 2.
Aus A wird B gefüllt,	Aus A wird C gefüllt,
B wird in C entleert,	C wird in B entleert,
C wird in A entleert.	B wird in A entleert.

Unser Räsonnement hat vorwiegend nur heuristischen Wert: Wir haben gezeigt, daß — abgesehen von dem ausgeschlossenen Fall $a < b + c$ — nur zwei Methoden existieren, die überhaupt geeignet sind, einen Fortschritt im Sinne unseres Problems herbeizuführen. Ob freilich das erstrebte Ziel auf einem dieser Wege resp. auf beiden erreicht wird, steht noch dahin; sicher ist nur, daß, wenn überhaupt ein Weg zu diesem Ziel führt, nur die beiden angegebenen hierfür in Frage kommen können. — Wir sahen oben, daß jede der beiden Methoden der Reihe nach alle Mengen von der Form $mb - nc$ resp. $n'c - m'b$ liefert. Die Aufgabe ist also gelöst, wenn sich hierunter auch einmal die Menge $\frac{a}{2}$ oder auch nur $\frac{a}{2} - c$ befindet: denn im letzteren Falle würde diese Menge zusammen mit dem Inhalt von C die Hälfte des zu teilenden Quantums geben. Dazu ist natürlich notwendig, daß B auch mindestens die Menge $\frac{a}{2} - c$ faßt, d. h es muß $b \geqq \frac{a}{2} - c$ sein oder $a \leqq 2(b + c)$. Es handelt sich also darum, ein Paar ganzer Zahlen m, n resp. m', n' so zu bestimmen, daß $mb - nc = \frac{a}{2}$

resp. $n'c - m'b = \frac{a}{2}$ ist, eine Aufgabe, die bekanntlich dann und nur dann lösbar ist, wenn b und c relativ prim sind oder ihr größter gemeinsamer Teiler in $\frac{a}{2}$ enthalten ist. Den Fall, daß b und c einen in $\frac{a}{2}$ enthaltenen Faktor gemein haben, dürfen wir jedoch unberücksichtigt lassen, da dieser Fall mit einem anderen äquivalent wäre, welcher sich ergibt, wenn unsere Zahlen a, b, c durch jenen

Faktor gekürzt werden, so daß wir also b und c von vornherein als relative Primzahlen annehmen dürfen. Danach erscheint unsere Aufgabe zunächst algebraisch als unbedingt lösbar, immerhin entsteht aber doch noch die Frage, ob die oben algebraisch skizzierten Operationen auch stets praktisch realisierbar sind; dies wird lediglich davon abhängen, ob das Gefäß A unter allen Umständen Flüssigkeit genug besitzt, um die vorgeschriebenen Füllungen der anderen Gefäße zu leisten. Daß beide Gefäße, B und C, ganz gefüllt werden, wird, wie schon oben angeführt, niemals erforderlich sein, da ja doch das eine derselben gleich wieder entleert werden müßte; jedoch kann es vorkommen, daß dem einen Gefäß nur noch ein Liter fehlt, um voll zu sein, und das andere dann gerade zu füllen ist. Soll dies ausführbar sein, so muß die gesamte Menge Flüssigkeit wenigstens $= b+c-1$ sein. Wir werden also die Bedingung stellen müssen: $a \geqq b + c - 1$. Wir hatten nun aber oben bereits die weitergehende Annahme $a \geqq b + c$ gemacht, nicht weil anderenfalls, d. h. für $a < b + c$, die von uns angegebenen Methoden unanwendbar wären, sondern vielmehr deswegen, weil für $a < b + c$ möglicherweise außer unseren zwei Wegen noch weitere zum Ziel führen. Von den oben vorläufig ausgeschlossenen Fällen $a < b + c$ würde somit unter Einwirkung der jetzigen Bedingung $a \geqq b + c - 1$ noch der Fall $a = b + c - 1$ hinzutreten; in diesem Falle also sind zwar unsere zwei Methoden auch praktisch anwendbar, doch führen hier möglicherweise auch andere und relativ kürzere Wege zum Ziel. Allgemein lautet unser Resultat: unsere Aufgabe ist unter den Voraussetzungen, daß b und c relativ prim sind und daß $b + c - 1 \leqq a \leqq 2b + 2c$ ist, stets lösbar und zwar auf 2 Arten, wobei im Falle $b + c - 1 = a$ noch weitere und zwar relativ kürzere Lösungen existieren können.

Die gewonnenen Resultate mögen an dem Beispiel des Poissonschen Falles: $a = 12$, $b = 8$, $c = 5$ illustriert werden. Die Gleichung

$$m \cdot 8 - n \cdot 5 = 6$$

besitzt die Lösung $m = 2$, $n = 2$; somit wird uns die erste

Methode ein Verfahren liefern, bei dem das Gefäß B zweimal und das Gefäß C gleichfalls zweimal gefüllt sein wird. Man findet in der Tat:

1)

A (12)	B (8)	C (5)
12	0	0
4	8	0
4	3	5
9	3	0
9	0	3
1	8	3
1	6	5
6	6	0

Der Gleichung $n' \cdot 5 - m' \cdot 8 = 6$ wird genügt durch $n' = 6$, $m' = 3$; bei dem zweiten Verfahren wird also C sechsmal und B dreimal gefüllt sein. Man bekommt:

2)

A (12)	B (8)	C (5)
12	0	0
7	0	5
7	5	0
2	5	5
2	8	2
10	0	2
10	2	0
5	2	5
5	7	0
0	7	5
0	8	4
8	0	4
8	4	0
3	4	5
3	8	1
11	0	1
11	1	0
6	1	5
6	6	0

Der Leser zählt, wie wir vorhergesagt, in der Spalte C sechsmal eine 5, in der Spalte B dagegen dreimal eine 8. — Poisson wird zwar vermutlich auf die an ihn gerichtete Frage die Lösung 1) angegeben haben; sollte er aber

wider Erwarten den Weg 2) eingeschlagen haben, so würde er alsbald erkannt haben, daß man sich diesen Weg abkürzen kann, indem man von der zweiten Stellung (7, 0, 5) direkt zu der zehnten (0, 7, 5) übergeht. Unser methodisches Verfahren macht also einen unnötigen Umweg und es existiert somit noch eine weitere, relativ kürzere Lösung, die sich nicht als Ausfluß unserer allgemeinen Methoden darstellt. Dies darf uns nicht überraschen; denn wir haben hier den Fall $a = b + c - 1$, der in dieser Hinsicht, wie wir oben sahen, eine Ausnahme bildet.

§ 3. Bedingungen der Lösbarkeit.

Von den beiden Ungleichheitsbedingungen des vorigen Paragraphen ist nur $a \leqq 2b + 2c$ absolut notwendig; die andere $b + c - 1 \leqq a$ muß nur dann erfüllt sein, wenn eine Lösung sowohl nach der einen wie nach der anderen Methode möglich sein soll, dagegen ist die Ausführbarkeit nur einer der beiden Methoden und insbesondere die Existenz einer Lösung schlechtweg nicht an die Bedingung $b + c - 1 \leqq a$ geknüpft. So ist der Fall $a = 10$, $b = 9$, $c = 4$ $(a < b + c - 1)$ natürlich lösbar, weil die Differenz von b und c schon die gewünschte Menge von 5 Litern gibt, oder z. B. der Fall $a = 14$, $b = 11$, $c = 5$, für den sich folgende Lösung nach der ersten Methode des § 2 ergibt:

A (14)	*B* (11)	*C* (5)
14	0	0
3	11	0
3	6	5
8	6	0
8	1	5
13	1	0
13	0	1
2	11	1
2	7	5
7	7	0

Die andere Methode versagt hier, da man bald auf den schon oben (S. 114) erörterten Fall kommt, daß einem Gefäß

nur noch ein Liter an seinem vollen Inhalt fehlt, und nun das andere Gefäß noch gefüllt werden soll, wozu die vorhandene Flüssigkeitsmenge dann nicht ausreicht; man erhält nämlich nach dieser Methode:

A (14)	B (11)	C (5)
14	0	0
9	0	5
9	5	0
4	5	5
4	10	0

und dann ist die weitere Fortsetzung unmöglich, da eben der Inhalt von A nicht mehr ausreicht, um C zu füllen. — Ferner existiert, um noch einige Fälle anzuführen, die der Bedingung $b + c - 1 \leqq a$ nicht genügen, eine Lösung für $a = 16$, $b = 11$, $c = 7$ nach der ersten; für $a = 14$, $b = 11$, $c = 6$, sowie $a = 20$, $b = 17$, $c = 9$ je eine nach der zweiten Methode, während die andere Methode in jedem der Fälle ausgeschlossen ist. Dagegen gibt es nach keiner der beiden Methoden eine Lösung mehr für das von Labosne (l. c. p. 146) angeführte Beispiel $a = 16$, $b = 12$, $c = 7$. Wir werden später sehen, daß *eine* der beiden Methoden jedenfalls immer noch eine Lösung liefert, wenn a nur $= b + c - 2$ ist, eine Bedingung, die für einen Teil der zuletzt angeführten Aufgaben noch erfüllt war, die aber auch noch immer nicht unbedingt notwendig ist, wie z. B. der soeben angeführte Fall $a = 14$, $b = 11$, $c = 6$ zeigt.

§ 4. Teilung nach beliebigem Verhältnis.

H. Schubert hat wohl zuerst dem Problem die Form gegeben, die Teilung in beliebigem Verhältnis auszuführen[1]), wobei dann a natürlich nicht mehr eine gerade Zahl zu sein braucht. Es wird also jetzt verlangt, ein Verfahren anzugeben, durch das jedes Maß $< a$ erhalten werden kann und zwar

1) „Zwölf Geduldspiele"; Berlin 1895, p. 112; vgl. a. Naturwissensch. Wochenschrift IX, 1894.

natürlich entweder in A oder in B. — Welche Mengen waren es nun, die bei den oben angegebenen 2 Methoden, für $a \geqq b + c$ den einzigen, die überhaupt in Frage kommen können, auftreten? Es waren die Ausdrücke $mb - nc$ bei der einen, $n'c - m'b$ bei der anderen Methode, wobei m, n, m', n' ganze Zahlen sind. Da nun b und c relativ prim sind, so können in diesen Reihen, wie wir sehen werden, alle Zahlen, die $< b$ sind, auftreten. Es mag hierbei zunächst eine Frage aufgeworfen werden, die der Leser vermutlich schon bei § 2 gestellt haben wird, nämlich: Ist die Reihe von Stellungen, die eine der Methoden — sagen wir z. B. die erste — liefert, eine unbegrenzte resp. wodurch findet das Verfahren sein naturgemäßes Ende? Eine praktische Unausführbarkeit ergibt sich für $a \geqq b + c - 1$, wie wir in § 2 (S. 114) sahen, nicht. Dagegen erreicht das Verfahren sein Ende offenbar, wenn $mb - nc = 0$ wird; alsdann haben wir in dem Gefäß B nichts, während wir das volle C in A entleeren müssen, haben also in C auch nichts und sind somit zu der Anfangsstellung $a, 0, 0$ zurückgekehrt. Dieser Fall $mb - nc = 0$ wird jedoch, da b und c relativ prim sind, nur eintreten für $m = c$, $n = b$, d. h. nachdem B c-mal und C b-mal gefüllt ist. Wenn wir nun aber der Größe n der Reihe nach die Werte $1, 2, 3 \ldots b-1$ geben und ein zugehöriges m jedesmal so wählen, daß $mb - nc$ positiv, aber $< b$ wird, so muß der Ausdruck $mb - nc$ alle Werte $1, 2 \ldots b - 1$ je einmal, wenn auch im allgemeinen in anderer Reihenfolge, annehmen. Denn bei zwei verschiedenen Wertsystemen: m_1, n_1 einerseits und m_2, n_2 andererseits sind auch $m_1 b - n_1 c$ und $m_2 b - n_2 c$ voneinander verschieden, da ja sonst $(m_1 - m_2)b - (n_1 - n_2)c = 0$, d. h. $n_1 - n_2 = b$ oder 0 wäre, was beides gegen die Voraussetzung verstößt; wenn aber alle Werte $m_1 b - n_1 c$, $m_2 b - n_2 c$, $m_3 b - n_3 c$, $\cdots m_{b-1} c - n_{b-1} c$ voneinander verschieden und jedes kleiner als b, aber größer als Null sein soll, so müssen sie die Werte $1, 2 \ldots b - 1$, wenn auch in anderer Ordnung, besitzen.

Wir sehen so, daß für $a \geqq b + c - 1$ unser Verfahren für das Gefäß B jedenfalls alle Mengen $1, 2 \ldots b - 1$ und

natürlich auch b selbst, den Inhalt von B, zu liefern imstande ist. In A können alsdann die zugehörigen Reste von a, d. h. alle Mengen von a abwärts bis $a - b$ inkl. erhalten werden. Dagegen fehlen, falls $b + 1 < a - b$ ist, die Zahlen von $b + 1$ bis $a - b - 1$ einschließlich beider Grenzen. Man kann den Inhalt von A nun aber noch dadurch erniedrigen, daß man aus ihm das Gefäß C füllt, und erhält so in A alle Maße von a bis $a - b - c$ inkl. Damit nun so alle Zahlen überhaupt vorkommen, also das Problem in ganzer Allgemeinheit lösbar ist, verlangt Schubert, daß

$$a - b - c \leqq b + 1 \text{ oder}$$
$$a \leqq 2b + c + 1,$$

und unterwirft also a den Bedingungen

$$b + c - 1 \leqq a \leqq 2b + c + 1.$$

Man wird aber auch eine solche Lösung akzeptieren müssen, die alle Mengen entweder in einem Gefäß oder in zweien zusammen liefert, und wenn wir uns auf diesen Standpunkt stellen, so erhalten wir in B und dem aus A gefüllten C zusammen nach unseren beiden Methoden alle Mengen von 1 bis $b + c$ inkl. und brauchen also nur noch zu fordern:

$$a - b - c \leqq b + c + 1 \quad \text{oder} \quad a \leqq 2b + 2c + 1.$$

Wir erhalten also durch unsere jetzige Problemerweiterung — Teilung nach beliebigem Verhältnis — für das a keine engeren Bedingungen im Vergleich mit denen in § 2, vielmehr kommt für gerades a — und mit solchem hatten wir es in § 2 ja nur zu tun — unsere jetzige Bedingung darauf hinaus, daß $a \leqq 2b + 2c$ sein muß und dies war gerade die Bedingung von § 2, die also, wie wir sehen, in unserer jetzigen enthalten ist. Wir können jetzt zusammenfassend sagen:

Theorem I: *Sind b und c relativ prim, und genügt a den Bedingungen $b + c - 1 \leqq a \leqq 2b + 2c + 1$, so ist eine Teilung der a Liter in jedem beliebigen Verhältnis, sogar nach zwei verschiedenen Methoden, möglich.*

Dabei ist bezüglich des Grenzfalles $b + c - 1 = a$ wieder zu beachten, daß in diesem Falle zur Herbeiführung einer bestimmten Teilung ein relativ kürzeres Verfahren als das unserer Methode eventuell möglich ist. — Wir veranschaulichen unser Theorem an einem Beispiel: Wählen wir, wie in der ursprünglichen Aufgabe des § 1: $b = 5$, $c = 3$, so darf, wie unser Theorem besagt, a jedenfalls zwischen 7 und 17 einschließlich der Grenzen liegen: mit Rücksicht auf die soeben erneut hervorgehobene und bereits oben (S. 115) an einem Beispiel illustrierte Besonderheit des Grenzfalles $a = 7$ wollen wir nicht diesen, sondern $a = 8$ als Beispiel herausgreifen und dazu als zweites den anderen Grenzfall $a = 17$ hinzunehmen. Die natürlich in den Spalten für B und C übereinstimmenden Lösungen nach Methode I lauten dann:

A (8)	B (5)	C (3)
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0
4	1	3
7	1	0
7	0	1
2	5	1
2	3	3
5	3	0
5	0	3
8	0	0

A (17)	B (5)	C (3)	
17	0	0	
12	5	0	
12	2	3	
15	2	0	
15	0	2	
10	5	2	$5 + 2 = 7$
10	4	3	
13	4	0	
13	1	3	
16	1	0	
16	0	1	
11	5	1	$5 + 1 = 6$
11	3	3	
14	3	0	
14	0	3	
17	0	0	

Bei dem zweiten Beispiel ist noch zu beachten, daß aus der Stellung 12, 5, 0 sofort folgt: 9, 5, 3 ($5 + 3 = 8$), und man sieht dann, daß alle überhaupt möglichen Teilungen der 17 Liter in 2 Teile erhalten werden. —

Den bisherigen Betrachtungen dieses Paragraphen legten wir lediglich die erste Methode zugrunde. Die Anwendung der zweiten Methode liefert jedoch, da diese ja nur die Umkehrung

der ersten ist, wie schon oben (S. 113) bemerkt wurde, dieselben Stellungen, nur in umgekehrter Reihenfolge[1]), wie man leicht sieht. Wir würden also unsere obigen Lösungsschemata nur auf den Kopf zu stellen haben. Man beachte auch, daß das soeben gegebene Schema für $a = 8$, $b = 5$, $c = 3$ natürlich nichts anderes ist als die Zusammenziehung der beiden Lösungsschemata 1) und 2) des § 1, wobei das von 2) als nach der zweiten Methode gebildet umgekehrt und so zu einem Schema nach erster Methode umgeformt ist.

Nehmen wir nun einmal an, a sei $= b + c - 2$, also erfülle die eine der obigen Bedingungen nicht mehr, dann werden unsere Methoden anwendbar sein, bis man an die Stellung kommt, wo das eine der Gefäße B und C voll ist bis auf 1 Liter und das andere gefüllt werden soll; auf diese Stellungen muß man aber auch kommen, weil ja die Methode an und für sich alle Teilungen liefert. Je nachdem man nun die erste oder zweite Methode anwendet, wird die weitere Fortsetzung an einer der für dieses a unmöglichen Stellungen

$$\begin{array}{cc} B & C \\ b & c-1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cc} B & C \\ b-1 & c \end{array}$$

scheitern. Wir werden also jedenfalls nicht mehr, wie oben, einen geschlossenen Zyklus erhalten, der uns, von oben nach unten gelesen, die Stellungen nach der einen und, in entgegengesetzter Richtung gelesen, die nach der anderen Methode liefert; sondern jetzt wird die Reihe, wenn wir die Stellungen, die die erste Methode liefert, von oben ab beginnend hinschreiben und die der zweiten von unten ab, sich nicht schließen, vielmehr an einer Stelle einen Einschnitt haben, aber auch nur an einer; denn die beiden unmöglichen und daher nur gedachten Stellungen müßten unmittelbar aufeinander folgen, da die nach der Stellung

$$\begin{array}{cc} B & C \\ b & c-1 \end{array}$$

auszuführende Operation (nach Meth. I) die sein würde, daß C

1) Schubert, „Geduldspiele", p. 119.

A (20)	*B* (13)	*C* (9)
20	0	0
7	13	0
7	4	9
16	4	0
16	0	4
3	13	4
3	8	9
12	8	0
12	0	8
(— 1)	13	8
(— 1)	12	9
8	12	0
8	3	9
17	3	0
17	0	3
4	13	3
4	7	9
13	7	0
13	0	7
0	13	7
0	11	9
9	11	0
9	2	9
18	2	0
18	0	2
5	13	2
5	6	9
14	6	0
14	0	6
1	13	6
1	10	9
10	10	0
10	1	9
19	1	0
19	0	1
6	13	1
6	5	9
15	5	0
15	0	5
2	13	5
2	9	9
11	9	0
11	0	9
20	0	0

aus B gefüllt wird, so daß dieser Stellung die Stellung

$$\begin{matrix} B & C \\ b-1 & c \end{matrix}$$

folgen würde und vice versa. Andererseits können aber diese beiden Stellungen auch in der ganzen Reihe nur einmal vorkommen, da unsere Methoden bei Wiederkehr derselben Stellung ja eine Reihe sich aufhebender Operationen in sich schließen würden (vgl. auch S. 118). Wir können also nach wie vor zu jeder beliebigen Stellung in unserer Reihe, d. h. zu jeder beliebigen Teilung, kommen, nur ist es jetzt nicht mehr gleichgültig, von welchem Ende wir ausgehen oder mit anderen Worten: welche Methode wir anwenden.

Wir veranschaulichen auch dies zunächst an einem Beispiel: $b = 13$, $c = 9$, also $a = b + c - 2 = 20$, wobei wir (s. nebenstehendes Schema) eine geschlossene Reihe erhalten, wenn wir uns vorstellen, daß das für die eine unausführbare Operation erforderliche Quantum zunächst geborgt wird, und diesem Umstand durch ein Minuszeichen Ausdruck geben.[1])

1) Die Ausführungen von Schubert über diesen Fall („Geduldspiele", p. 118, sowie „Mathem. Mußestunden". 2. Aufl. der kl. Ausg., 1904, p 76 und 3. Aufl. der gr.

Damit ist denn nun zugleich auch der am Ende des § 3 versprochene Nachweis geliefert, daß für $a = b + c - 2$ die Teilung in gleiche Teile jedenfalls noch möglich sei. Wir können abschließend sagen:

Theorem II: *Sind b und c relativ prim und ist*

$$b + c - 2 \leqq a \leqq 2b + 2c + 1,$$

so ist eine Teilung von a nach beliebigem Verhältnis jedenfalls auf eine Art möglich.[1])

Nach der in diesem Paragraphen gewonnenen Auffassung kann es uns auch nicht mehr wunder nehmen, daß besondere Teilungen selbst dann bisweilen noch möglich sind, wenn die in unserem Theorem aufgestellten Bedingungen nicht mehr erfüllt sind. So ist z. B. wie schon S. 117 erwähnt war, in dem Fall $a = 14$, $b = 11$, $c = 6$, obwohl $a < b + c - 2$ ist, eine Teilung in 2 gleiche Teile noch möglich. Würden wir hier unsere Methode in derselben Weise anwenden wie auf den Fall $a = 20$, $b = 13$, $c = 9$ oben, so würden wir ein Schema mit *zwei* unübersteigbaren Einschnitten statt *eines* erhalten; die in dem Raum zwischen beiden enthaltenen Teilungen sind dann unerreichbar, welche Methode man auch anwendet. Für diesen Fall gehört nun die Halbierung aber nicht dazu, wird vielmehr in folgender Weise erhalten:

A (14)	*B* (11)	*C* (6)
14	0	0
8	0	6
8	6	0
2	6	6
2	11	1
13	0	1
13	1	0
7	1	6
7	7	0

Ausg., Bd. 1, 1907, p. 62/63), wonach die Teilbarkeit hier eine beschränkte und z. B. die von 20 in 16 und 4 Liter unmöglich sein soll, sind somit unrichtig.

1) Das Intervall für a geht hier also auf beiden Seiten weiter als bei Schubert (s. hier S. 119, sowie Schubert, „Mathem. Mußestunden", 3. Aufl., Bd. 1, 1907, p. 55 und 63).

§ 5. Dreiteilung.

Auf die Ausdehnung unseres Problems auf mehr als 3, also etwa 4 Gefäße und dementsprechende Forderung einer Dreiteilung[1]) wollen wir näher nicht eingehen. Im allgemeinen wird mit wachsender Zahl der Gefäße die Aussicht auf Lösbarkeit und ebenso die Zahl der Lösungen wohl wachsen. In sehr vielen Fällen wird man, nachdem ein oder mehrere Teile in gewünschter Weise hergestellt sind, für die weitere Teilung auf die einfacheren Fälle (mit weniger Gefäßen) zurückgreifen können. Wir geben hierfür als Beispiel die Aufgabe der Dreiteilung von 24 Litern, wenn die anderen 3 Gefäße bzw. 13, 11, 7 Liter fassen:

A (24)	*B* (13)	*C* (11)	*D* (7)
24	0	0	0
13	0	11	0
13	0	4	7
13	4	0	7
20	4	0	0
9	4	11	0
9	4	4	7
16	8	0	0

Damit ist ein Drittel in B gewonnen, und es sind jetzt nur noch die 16 Liter in 2 gleiche Teile zu teilen mittels der Gefäße C und D, wofür wir auf den in § 3, S. 117 als lösbar nach der ersten Methode angeführten Fall $a = 16$, $b = 11$, $c = 7$ rekurrieren.

1) Eine Dreiteilungsaufgabe findet sich bereits bei **Tartaglia** (l. c. art. 133, fol. 256), und zwar für die Zahlen 24, 13, 11, 5; die dort angegebene Lösung ist jedoch außerordentlich umständlich, da **Tartaglia** übersieht, daß wegen 13 — 5 = 8 die Dreiteilung sofort auf den früheren Fall der Halbierung sich reduziert.

Kapitel V.

Parkettierungen.

Non mihi si linguae centum sint, oraque centum, enumerare possem, quam multis in rebus usus sit numerorum.

PHILIPP MELANCHTHON.
Vorrede zu Michael Stifels „Arithmetica integra".

In diesem Kapitel soll uns folgende Aufgabe beschäftigen:

Eine Fläche soll mit Steinen ausgelegt werden, die die Form regulärer Polygone haben; welche Formen sind hier anwendbar, wenn

1. Polygone einer Art,

2. Polygone verschiedener Arten

verwandt werden? Dabei sollen die etwa an den Rändern der Flächen verbleibenden Lücken mit Teilstücken ausgefüllt werden.

In historischer Beziehung beschränken wir uns vorläufig auf die Angabe, daß die Lösung der ersten Form unserer Aufgabe bereits den Pythagoräern bekannt war[1]), ihre zweite Form dagegen erst in neuerer Zeit eine eingehendere Behandlung gefunden hat.[2])

Zu weiterer Präzisierung der Aufgabe erheben wir die Forderung, daß alle Punkte, in denen die Ecken der Polygone zusammenstoßen, oder, wie wir kurz sagen wollen, alle „Punkte" unserer Parkettierung insofern **gleichgeartet** sein sollen, als sie alle in der Zahl und Art der in ihnen zusammenstoßenden

1) Siehe M. Cantor, „Gesch. der Mathem.", I (3. Aufl.), p. 177.

2) Nähere Angaben unten.

Polygone, dagegen nicht notwendig in deren gegenseitiger Anordnung, übereinstimmen sollen.

Die erste Bedingung für die Möglichkeit einer Kombination ist offenbar die, daß die Summe der in je einem Punkte zusammenstoßenden Winkel $4R$ beträgt. Da nun die Summe der Außenwinkel eines Polygons, unabhängig von der Seitenzahl, stets $= 4R$ ist (s. Fig. 1), so wird der Außenwinkel des regulären Polygons mit wachsender Seitenzahl immer kleiner, sein Nebenwinkel, der Polygonwinkel, also immer größer, ohne jedoch die obere Grenze $2R$ zu erreichen. Um also den Winkelraum von $4R$ mit regulären Polygonen *einer* Art (erster Teil der Aufgabe) auszufüllen, sind mindestens deren 3 erforderlich, und zwar passen hierfür gerade drei 6-Ecke, während Polygone größerer Seitenzahl hier überhaupt unbrauchbar sind, da drei von ihnen eine Winkelsumme $> 4R$, zwei dagegen eine solche $< 4R$ liefern würden. Der kleinste Polygonwinkel, der Dreieckswinkel, ist der 6-te, der Viereckswinkel der 4-te Teil von $4R$, während mit dem Fünfeckswinkel sich der Winkelraum um einen Punkt herum dann offenbar überhaupt nicht ausfüllen läßt (s. a. in Bd. II die Fig. 1 des Kapitels „Das Hamiltonsche Dodekaederspiel“). Die erste Frage beantwortet sich also dahin, daß *die Parkettierung nur mit Dreiecken, Vierecken und Sechsecken ausgeführt werden kann*, so zwar, daß davon bzw. je 6, 4 und 3 Polygone in jedem Punkte zusammenstoßen. Diese 3 Lösungen genügen nicht nur für den einzelnen Punkt, sondern lassen sich nach allen Seiten hin fortsetzen (s. Figuren 2, 3, 4). Dies war also, wie schon oben gesagt, bereits den Pythagoräern bekannt.

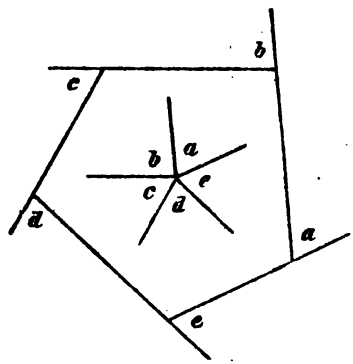


Fig. 1.

Verwendet man zweitens Polygone verschiedener Arten und fragt man zunächst nur wieder, auf welche verschiedene

Weisen durch sie der Winkelraum um einen Punkt herum ausgefüllt wird, so darf man hierbei annehmen, daß unter den in jedem Punkte zusammenstoßenden Polygonen sich nur je ein Dreieck befindet. Je zwei Dreieckswinkel lassen sich nämlich stets gerade durch einen Sechseckswinkel ersetzen; die Fälle mit mehr als einem Dreieck in je einem Punkte ergeben sich also nachher aus den Fällen, in denen Sechsecke vorkommen. Befindet sich unter den in einem Punkte zusammenstoßenden Polygonen aber nur höchstens ein Dreieck, so können dort, da der Viereckswinkel schon $= 1R$ ist, höchstens 4 Polygone im ganzen zusammenstoßen; andererseits müssen es aber mindestens 3 sein.

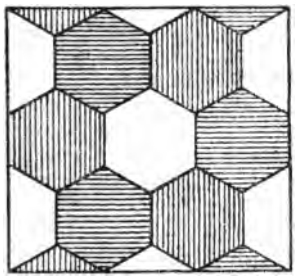


Fig. 2.

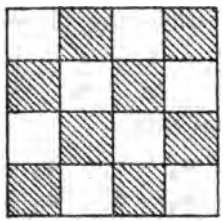


Fig. 3.

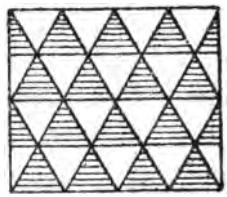


Fig. 4.

In dem letzteren Falle, bei je 3 Polygonen, beträgt die Summe der Außenwinkel der 3 Polygonwinkel $2R$; haben wir also je ein m_1-, m_2- und m_3-Eck in jedem Punkte, so muß

$$\frac{4}{m_1} + \frac{4}{m_2} + \frac{4}{m_3} = 2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{2} \quad \text{sein.}^{1}) \tag{1}$$

1) Ähnliche diophantische Gleichungen wie die obigen treten übrigens auf bei Gruppen linearer Substitutionen, vgl. Felix Klein, „Vorlesungen über das Ikosaeder", Leipzig 1884, p. 117, sowie Klein-Fricke, „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen", Bd. I, 1890, p. 341. Vgl. a. Ernst Sós, „Die diophantische Gleichung $\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$", Zeitschr. für mathem. u. naturw. Unterr. 36, 1905, p. 97—102; ferner Intermédiaire des Mathématiciens, t. II, 1895, p. 3/4 (Question 406); p. 299—302 (J. Sadier; G. Vivanti; E. Fau-

Es sei nun $m_1 \leqq m_2 \leqq m_3$; dann ist offenbar $m_1 \leqq 6$ Hiernach ergeben sich folgende Fälle:

1) $m_1 = 3$; die Gleichung (1) lautet also jetzt:

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{6}.$$

Dann muß der Annahme $m_2 \leqq m_3$ wegen: $6 < m_2 \leqq 12$ sein, und man erhält folgende Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} m_2 &= 7, & m_3 &= 42 \\ m_2 &= 8, & m_3 &= 24 \\ m_2 &= 9, & m_3 &= 18 \\ m_2 &= 10, & m_3 &= 15 \\ m_2 &= 12, & m_3 &= 12 \end{aligned}$$

2) $m_1 = 4$; die Gleichung (1) reduziert sich auf:

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{4};$$

also $4 < m_2 \leqq 8$; dies gibt:

$$\begin{aligned} m_2 &= 5, & m_3 &= 20 \\ m_2 &= 6, & m_3 &= 12 \\ m_2 &= 8, & m_3 &= 8 \end{aligned}$$

3) $m_1 = 5$; $\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{3}{10}$; $5 \leqq m_2 \leqq 6$, also:

$$m_2 = 5, \qquad m_3 = 10.$$

4) $m_1 = 6$; $\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{3}$; $m_2 = 6$, $m_3 = 6$, der schon im ersten Teil der Aufgabe erledigte Fall (Fig. 2)

Stoßen zweitens in jedem Punkte 4 Polygone zusammen, so betragen die 4 Außenwinkel zusammen $4R$; also lautet unsere Bedingungsgleichung jetzt

$$\frac{4}{m_1} + \frac{4}{m_2} + \frac{4}{m_3} + \frac{4}{m_4} = 4 \quad \text{oder}$$

$$(2) \qquad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = 1.$$

---

quembergue; A. Palmström; C. Moreau): t. III, 1896, p. 14—16 (Dujardin); t. IV, 1897, p. 175/176 und t. VII, 1900, p. 198 (Lagoutinsky); t. V, 1898, p. 81—83 (A. Palmström).

Ist $m_1 \leqq m_2 \leqq m_3 \leqq m_4$, so muß $m_1 \leqq 4$ sein. Nehmen wir

1) $m_1 = 3$; dann ist $\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = \frac{2}{3}$, also da nur ein Dreieck vorkommen soll: $4 \leqq m_2 < 5$, d. h. $m_2 = 4$; $\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = \frac{5}{12}$, also $m_3 = 4$, $m_4 = 6$.

2) $m_1 = 4$ liefert nur den schon im ersten Teil erledigten Fall von 4 Quadraten (Fig. 3). — Dazu treten dann noch diejenigen Fälle, die sich aus den bereits angeführten durch Ersatz eines oder mehrerer 6-Ecke durch je zwei 3-Ecke ergeben, und wir erhalten schließlich unter Zusammenfassung der beiden Teile der Aufgabe im ganzen *folgende 17 Fälle*[1]) in leichtverständlicher tabellarischer Zusammenstellung:

I.	3,	7,	42.	
II.	3,	8,	24.	
III.	3,	9,	18.	
IV.	3,	10,	15.	
V.	3,	12,	12.	
VI.	4,	5,	20.	
VII.	4,	6,	12.	
VIII.	4,	8,	8.	
IX.	5,	5,	10.	
X.	6,	6,	6.	
XI.	3,	3,	4,	12.
XII.	3,	3,	6,	6.

1) Diese finde ich zuerst angegeben bei Thomas Leybourn, „The Mathematical Questions, proposed in the Ladies' Diary, and their original answers" . . ., London 1817, vol. III, p. 132/133, und zwar unter den Fragen, die den Jahren 1784—1785 angehören. Frage wie Antwort rühren her von dem Reverend Jones (s. „Index of contributors" in vol. IV, p. 480). Gestreift hat unser Problem jedoch, wie z. B. bei E. Fourrey, „Curiosités géometriques", Paris 1907, p. 363 angeführt ist, angeblich bereits Kepler und zwar in seiner „Harmonice mundi" (1619), in der freilich verwandte Fragen der Polyeder- und Polygontheorie behandelt werden.

XIII. 3, 4, 4, 6.
XIV. 4, 4, 4, 4.
XV. 3, 3, 3, 4, 4.
XVI. 3, 3, 3, 3, 6.
XVII. 3, 3, 3, 3, 3, 3.

Diese 17 Lösungen besitzt unser Problem also, wenn wir uns mit der vollständigen Ausfüllung des Gebietes um einen Punkt herum vorerst begnügen und von der Frage nach der allseitigen Fortsetzbarkeit des Musters absehen.[1]) Daß für die Lösungen unserer ersten Aufgabe, die Fälle X, XIV, XVII unserer jetzigen Tabelle, diese Fortsetzung überall möglich ist, bemerkten wir bereits oben und ist von vornherein, da in jedem Falle nur eine Art von Polygonen auftritt, selbstverständlich. Für eine große Zahl der übrigen Fälle ist die Fortsetzung dagegen nicht möglich: Ist nämlich beispielsweise *a, b, c* einer der Fälle mit je 3 Polygonen aus unserer Tabelle und sind *a* und *b* verschieden, so muß notwendig *c* eine gerade Zahl sein. Es muß sich nämlich an die eine Seite

1) Der in der vorigen Anmerkung zitierte Autor des „Ladies' Diary" läßt diese Frage ganz außer acht. Sie ist wohl zuerst in Betracht gezogen bei Badoureau („Mémoire sur les figures isoscèles", Journal de l'école polytechnique, 49ième cahier, tome XXX, 1881, p. 86/87), der überhaupt unser Problem, noch durch eine weitere unten zu erwähnende Bedingung eingeschränkt, zuerst genauer studiert hat. Nach Badoureau beschäftigte sich mit diesen Fragen — unter unseren Bedingungen — Lucien Lévy („Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers", Bulletin de la société philomathique, 8ième série, t. III, 1891, p. 46—50; s. a. Intermediaire des mathématiciens I, 1894, p. 147, Question 262, wiederholt t. VII, 1900, p. 158, und s. a. Journ. de mathém. élém. (3) V, 1891, p. 96). Vgl. a. eine Abhandlung von Robin (s. liter. Index), sowie das in voriger Anmerkung zitierte Buch von E. Fourrey, p. 363—371. Siehe auch M. Brückner, „Vielecke und Vielflache", Leipzig 1900, p. 158. — Bemerkt sei noch, daß die im literar. Index mit aufgeführte Arbeit von Sebastien Truchet (Jahr 1704) es zwar auch mit Parkettierungen, jedoch solchen, die aus schwarzen und weißen rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt werden, also mit einer ganz anderen Problemstellung als wir hier, zu tun hat.

jedes c-Ecks ein a-Eck, an die nächste Seite ein b-Eck und so abwechselnd ein a-Eck und ein b-Eck anlegen, was nur bei geradem c möglich ist. Andernfalls würden nämlich einmal in einem Punkte zwei a-Ecke und ein c-Eck oder aber zwei b-Ecke und ein c-Eck zusammenstoßen, wobei jedesmal eine Winkelsumme $\gtrless 4R$ entstände. Wenn also a, b, c alle drei unter sich verschieden sind, so müssen alle drei gerade sein; damit kommen die Fälle I, II, III, IV, VI als nicht fortsetzbar in Wegfall, während der Fall VII unserer Bedingung entspricht. Sind zwei der a, b, c gleich, etwa a und c, so muß aus demselben Grunde die Zahl $a = c$ gerade sein, während b gerade oder ungerade sein darf; damit kommt auch der Fall IX in Wegfall, während V und VIII dieser Forderung genügen.

Von den Fällen mit je 4 Steinen in jedem Eckpunkt scheidet nun noch Fall XI als nicht fortsetzbar aus, wie man leicht folgendermaßen erkennt: Denken wir uns ein 12-Eck hingelegt (Fig. 5), so ergeben sich für die Fortsetzung nach unserer Formel

3, 3, 4, 12

folgende verschiedene Fälle:

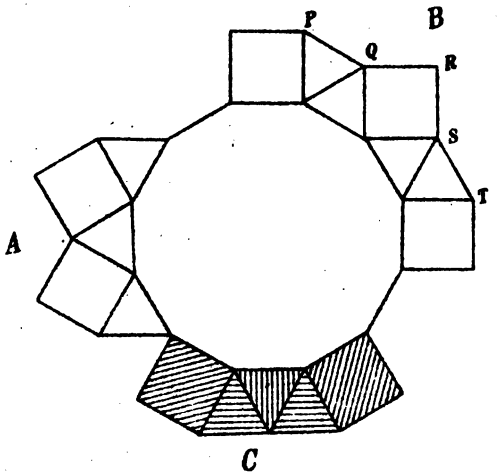


Fig. 5.

1. Legt sich an 3 oder mehr aufeinanderfolgende 12-Ecksseiten je ein Dreieck, so bekommen wir offenbar eine Fortsetzung wie in unserer Figur im Gebiete A. Dort stoßen dann — entgegen unserer Formel 3, 3, 4, 12 — in einem Punkte notwendig zwei Quadrate zusammen.

2. Legt sich an zwei benachbarte Seiten des 12-Ecks je ein Dreieck, so muß sich also nach 1. an die dann auf beiden Seiten sich anschließenden 12-Ecksseiten ein Quadrat anlegen.

Wir erhalten dann die Partie B; an PQR müßte sich nun ein 12-Eck anlegen und an TSR gleichfalls, in R stießen also zwei 12-Ecke zusammen.

3. Legen sich aber auch an zwei benachbarte Seiten des 12-Ecks niemals Dreiecke, sondern immer nur an eine von ihnen, so müssen sich also an deren beide Nachbarseiten Quadrate anlegen, und wir bekommen eine Partie wie das in der Figur schraffierte Gebiet C, wo in einem Punkte vorschriftswidrig 3 Dreiecke zusammenstoßen.

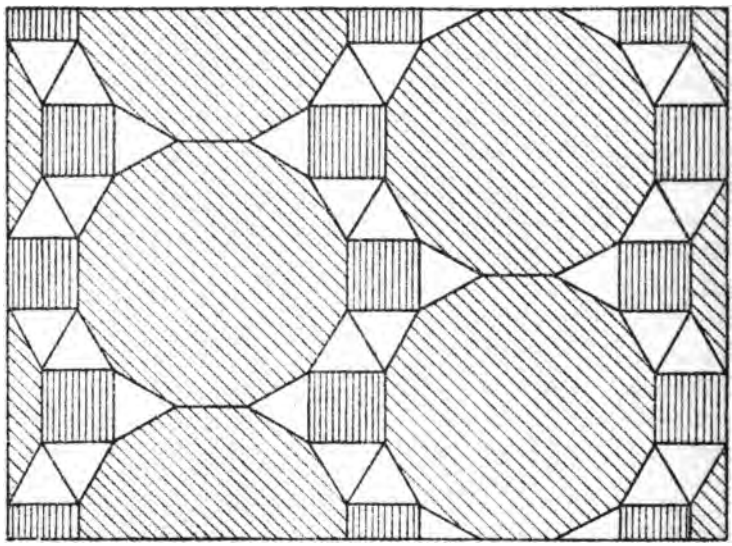


Fig. 6.

Damit erweist sich dieser Fall als unmöglich. Sieht man freilich von unserer Forderung der Übereinstimmung aller „Punkte" des Musters in Zahl und Art ihrer Polygone ab, so erhält man leicht Anordnungen wie Fig. 6 und Fig. 7. Diese stellen aber nicht den Fall 3, 3, 4, 12 im Sinne unserer Aufgabe dar, sondern Fig. 6 vielmehr eine Kombination dieses Falles mit dem Fall V (3, 12, 12) und Fig. 7 eine solche[1])

1) Ebenso kann man leicht eine entsprechende Kombination des Falles XI mit XV angeben.

mit XVII (3, 3, 3, 3, 3, 3) oder im Grunde genommen einen ganz anderen Fall: Denken wir uns nämlich statt der 6 in einem Punkte zusammenstoßenden Dreiecke das von ihnen gebildete Sechseck gesetzt, so illustriert unsere Fig. 7 den Fall 4, 6, 12 (VII).

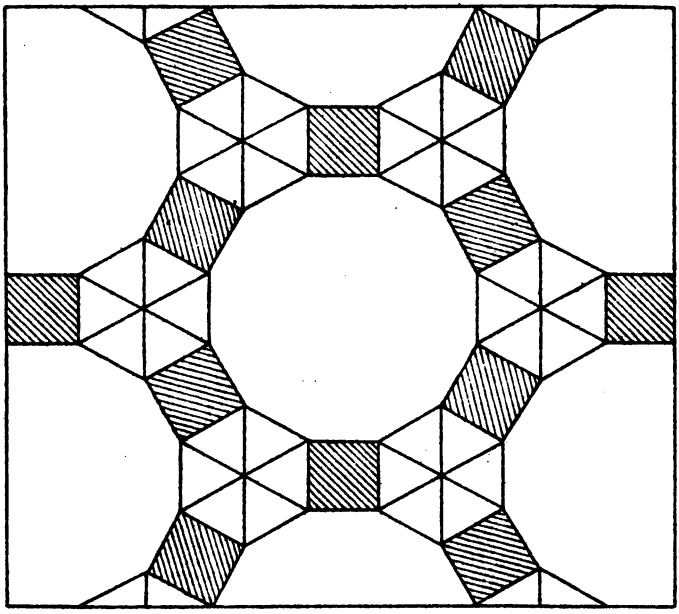


Fig. 7.

Die nach Streichung der bereits als nicht fortsetzbar erkannten Muster I, II, III, IV, VI, IX, XI *noch übrig bleibenden 10 sind alle fortsetzbar;* für VII, X, XIV, XVII zeigten wir dies bereits durch die Figuren 7, 2, 3, 4. Für V mag es Fig. 8 illustrieren und für den praktisch sehr oft angewandten Fall VIII die Fig. 9.

Zu betrachten sind somit nur noch die Fälle XII, XIII, XV, XVI. Da es sich bei ihnen um 4 oder 5 Polygone in jedem „Punkte" handelt, wollen wir zunächst auf eine Forderung Badoureaus hinweisen, die bei den von uns gestellten Bedingungen nur so lange erfüllt ist, als entweder alle Polygone

von gleicher Art sind oder aber in jedem Punkte nur 3 Polygone zusammenstoßen. Badoureau berücksichtigt nämlich nur die

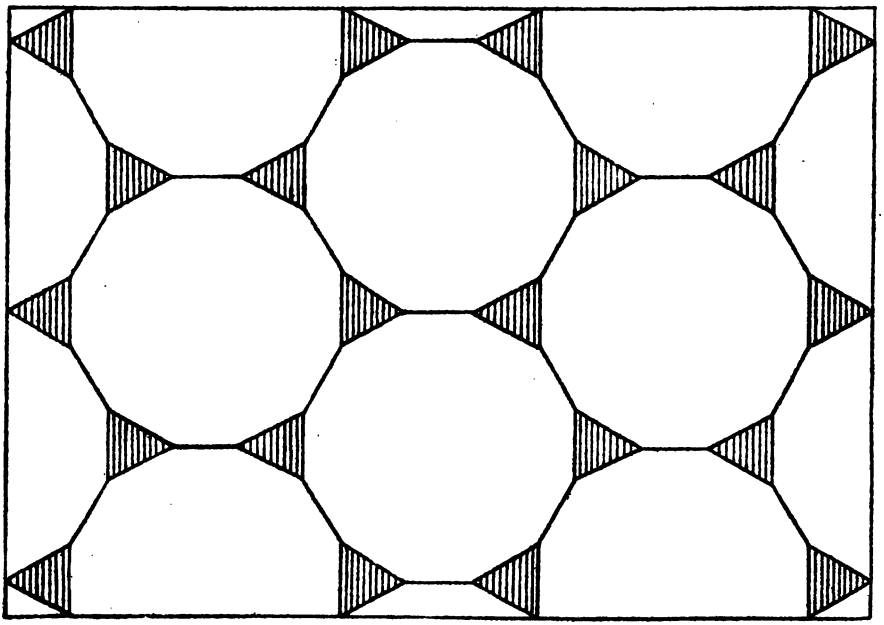


Fig. 8.

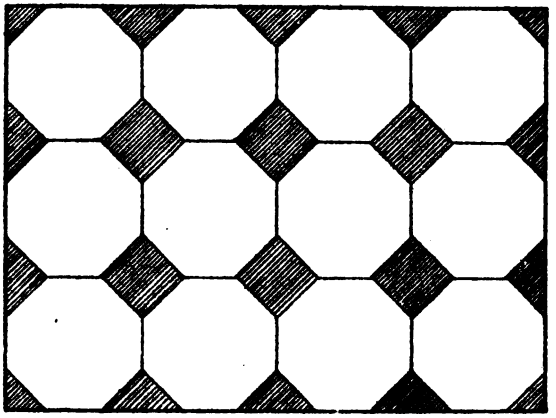


Fig. 9.

Muster, die so beschaffen sind, daß, wenn man dasselbe Muster zweimal zeichnet und nun die eine Zeichnung auf die andere legt, so daß irgendein n-Eck mit irgendeinem anderen n-Eck sich deckt, man alsdann durch bloße Drehung der einen Zeichnung erreichen kann, daß beide nicht nur in den Eckpunkten des betreffenden n-Ecks, sondern — bei genügender Fortsetzung der Muster — auch in allen anderen „Punkten" zur Deckung kommen. Wir wollen, nur um eine einfache Ausdrucksweise zu haben, ein Muster, das diese Bedingung erfüllt, „isomorph" nennen und eins, das dem nicht genügt, „anisomorph". Haben wir in jedem Punkte nur 3 Polygone, so bedingt unsere Forderung, daß diese Polygone in allen Punkten dieselben seien, den Isomorphismus von selbst; nicht so bei 4 oder 5 Polygonen in jedem Punkte.

Nach dieser Vorbemerkung wenden wir uns nunmehr den einzelnen Fällen zu und zwar zuerst zu Fall XII unserer Tabelle (3, 3, 6, 6) und geben für ihn zunächst zwei Beispiele: Figuren 10 und 11, die beide isomorph sind. Man überzeugt sich auch leicht, daß diese beiden Muster die einzig möglichen isomorphen für diesen Fall sind. Sehen wir aber von der Forderung des Isomorphismus ab, so erhalten wir leicht andere unseren Bedingungen genügende Muster, ja sogar deren unendlich viele. Sowohl Fig. 10, wie 11 können wir uns nämlich zusammengesetzt denken aus „Elementarstreifen" von der Form der Fig. 12, d. h. Mustern, die auf zwei Seiten, etwa oben und unten, durch parallele Gerade begrenzt sind und die wir uns auf den beiden anderen Seiten, also rechts und links, in gleicher Weise bis ins Unendliche fortgesetzt denken können. Fig. 10 ist alsdann aus solchen Elementarstreifen in der Weise zusammengesetzt, daß immer eine Sechseckseite an einer Dreiecksseite anliegt, während in Fig. 11 stets Sechseckseite an Sechseckseite, Dreiecksseite an Dreiecksseite geschoben ist. Nun können wir ja aber aus Elementarstreifen ein Muster zusammensetzen, indem wir die Streifen bald in der Weise der Fig. 10, bald in derjenigen der Fig. 11 aneinanderschieben, und offenbar ist die Zahl der verschiedenen

Muster, die man so erhalten kann, unbegrenzt. Unserer Bedingung, daß in jedem Punkte dieselben Polygone zu-

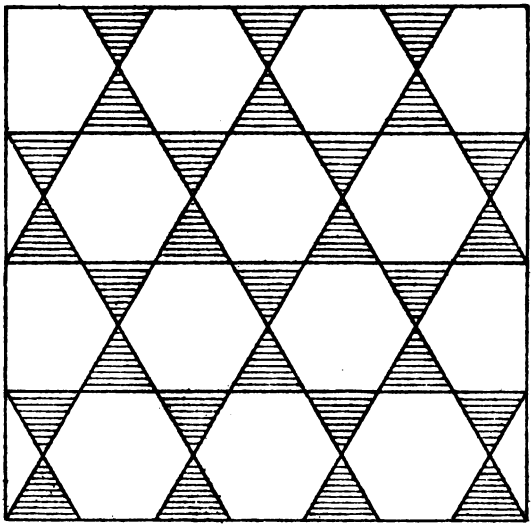


Fig. 10.

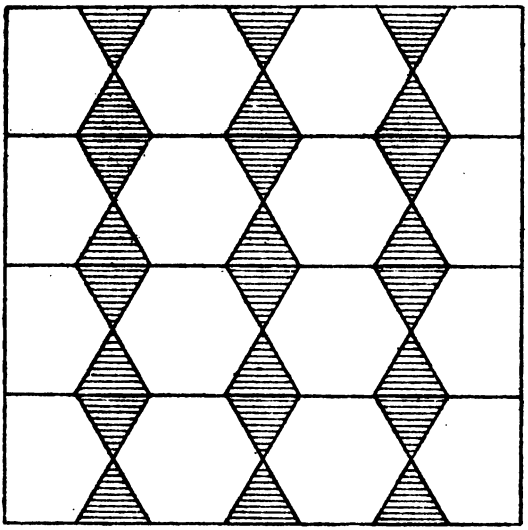


Fig. 11.

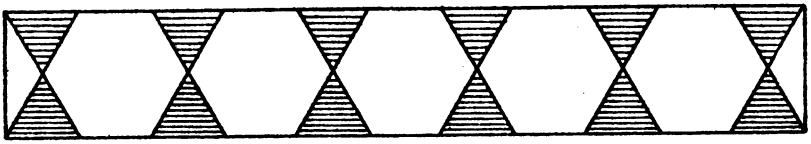


Fig. 12.

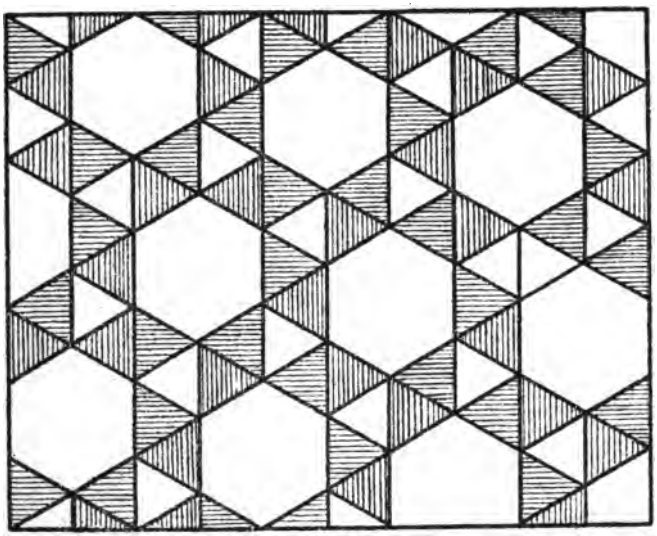


Fig. 13.

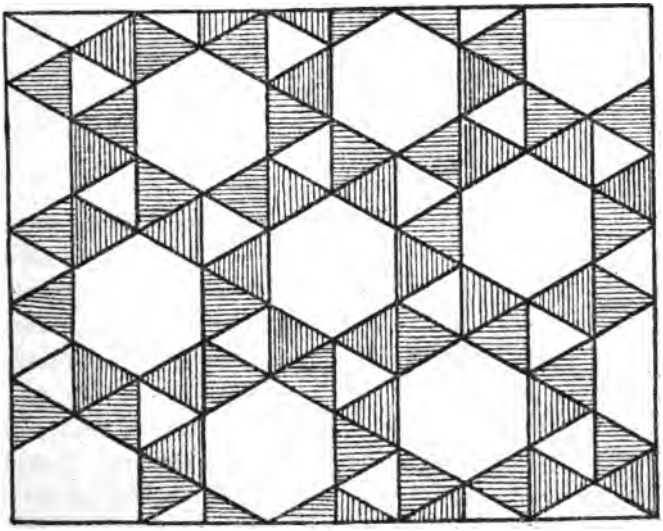


Fig. 14.

sammenstoßen, nämlich zwei Sechsecke und zwei Dreiecke, genügen alle, dagegen der Badoureauschen Forderung des Isomorphismus keins (außer Figur 10 und 11 natürlich). Alle diese Muster sind auch einfach-periodisch, da jeder Elementarstreifen es ist, oder mit anderen Worten: sie gestatten in einer Richtung eine Verschiebung um eine gewisse Strecke und ebenso um das Doppelte und jedes Vielfache dieser Strecke, d. h. sie befinden sich nach Ausführung dieser Verschiebungen mit sich selbst in Deckung. Im Gegensatz dazu sind die

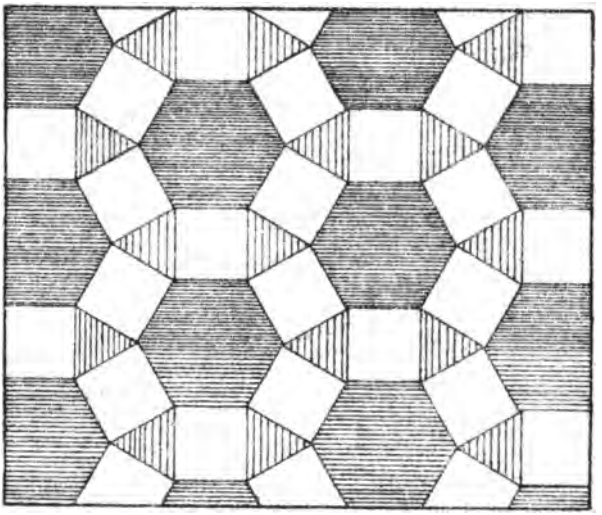


Fig. 15.

Muster der Figuren 10 und 11 doppelt-periodisch, indem sie solche Verschiebungen in zwei wesentlich verschiedenen Richtungen der Ebene gestatten. — Sehen wir freilich das Sechseck nur als ein sechsfaches Dreieck an und denken es uns durch 6 Dreiecke ersetzt, so schrumpfen alle diese Fälle zu einem zusammen, dem der Fig. 4.

Wir betrachten darauf den Fall XVI, bei dem es sich gleichfalls nur um Dreiecke und Sechsecke handelt. Man überzeugt sich leicht, daß es bei unserer Formulierung des Pro-

blems nur zwei Muster für diesen Fall gibt, die durch die Figuren 13 und 14 dargestellt sind. Das eine Muster ist offenbar nur das Spiegelbild des anderen. Beide sind doppeltperiodisch, aber nicht isomorph (es gibt zwei Arten von Dreiecken: die mit einer Seite und der gegenüberliegenden Ecke — und die mit keiner Seite, sondern nur mit den drei Ecken an Sechsecke anstoßen).

Für den Fall XIII (3, 4, 4, 6) geben wir als Beispiele zunächst die Figuren 15, 16 und 17 [1]), die alle drei doppelt-

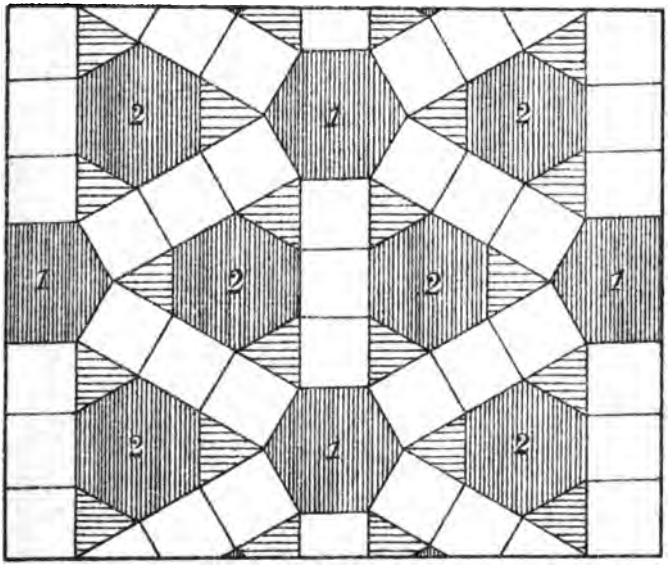


Fig. 16.

periodisch, von denen jedoch nur Fig. 15 isomorph ist. Daß die Muster der Figuren 16 und 17 anisomorph sind, erkennt man leicht, wenn man beispielsweise nur die Sechsecke ins Auge faßt. Es gibt deren hier 3 Arten:

1. solche, auf deren sämtliche 6 Seiten Quadrate aufgesetzt sind;

1) Diese letzte Figur entnahm ich der Abhandlung von L. Lévy aus dem Bull. soc. philomathique, l. c. p. 48 (Fig. 2 dort).

2. solche, auf deren Seiten abwechselnd Quadrate und Dreiecke aufgesetzt sind;

3. solche, bei denen auf 4 Seiten Quadrate, auf zwei und zwar gegenüberliegende dagegen Dreiecke aufgesetzt sind. — Sechsecke der ersten Art weisen alle 3 Figuren: 15, 16, 17 auf, aber, während Fig. 15 nur solche Sechsecke enthält, be-

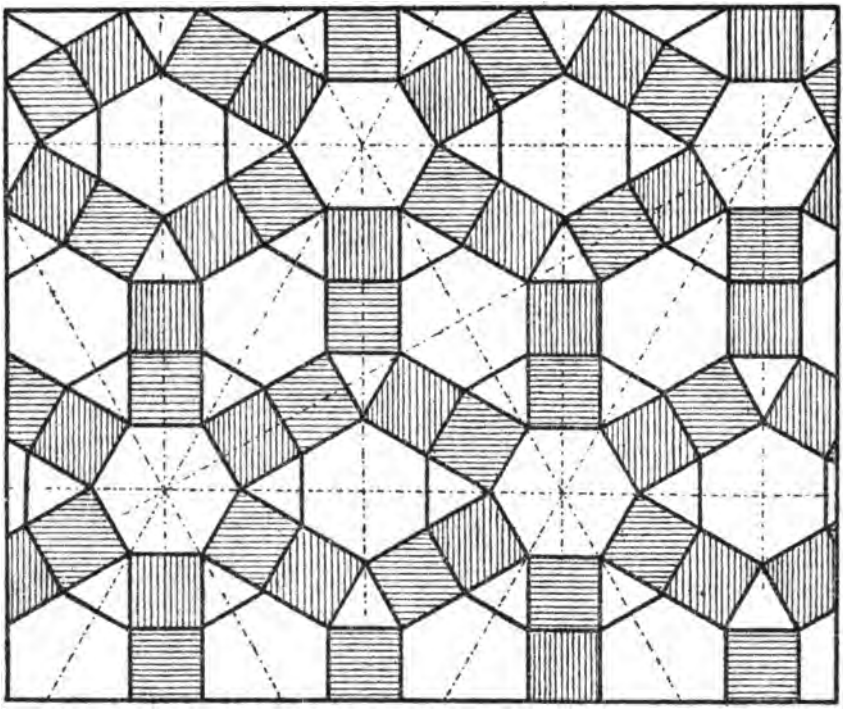


Fig. 17.

sitzt Fig. 16 daneben solche der zweiten, Fig. 17 solche der dritten Art. Fig. 16 geht übrigens, wenn man sich die Sechsecke erster Art mit den herumgelagerten 6 Quadraten und 6 Dreiecken durch ein Zwölfeck ersetzt denkt, in ein Muster für Fall VII (4, 6, 12; vgl. Fig. 7) über. — Als letztes Beispiel für diesen Fall geben wir ein ganz unregelmäßiges Muster, das der Fig. 18: es enthält nicht nur Sechsecke der obigen

3 Arten, durch 1, 2, 3 bezeichnet, sondern auch noch solche von 2 weiteren Arten, nämlich

4. auf zwei nicht gegenüberliegende und nicht benachbarte Sechsecksseiten sind Dreiecke aufgesetzt, auf die übrigen 4 aber Quadrate, und

5. auf einer Sechsecksseite sitzt ein Dreieck, auf den übrigen 5 aber Quadrate.

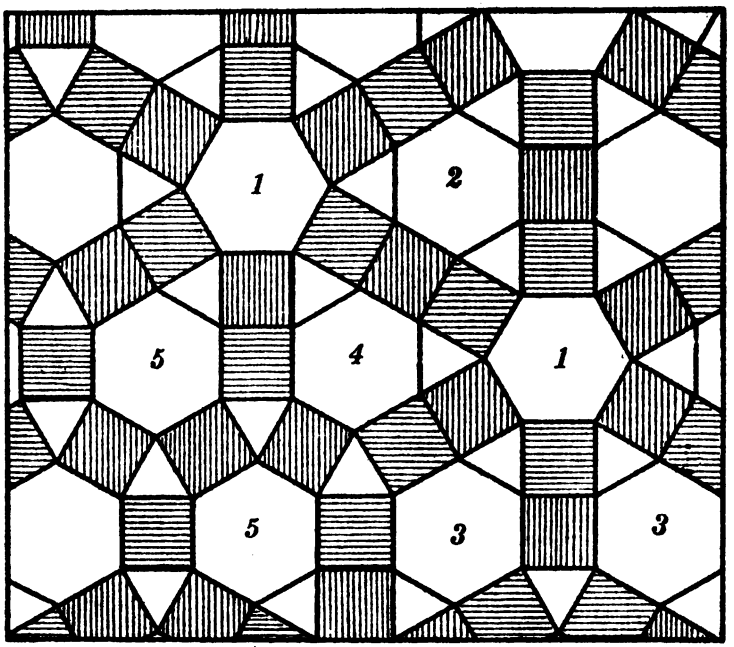


Fig. 18.

Diese 5 Arten erschöpfen übrigens alle Möglichkeiten, da ja zwei Dreiecke unserer Formel 3, 4, 4, 6 gemäß in keinem Punkte zusammenstoßen dürfen.

Es bleibt uns nur noch der Fall XV (3, 3, 3, 4, 4), den die Figuren 19–22 illustrieren mögen, die alle vier doppeltperiodisch und von denen die ersten beiden isomorph, die letzten beiden anisomorph sind, wie man leicht erkennt.

Sieht man von unserer Forderung der Homogeneität des Musters in allen Punkten ab, so ergeben sich natürlich außerordentlich viel mehr Muster. Wir gehen hierauf nicht näher ein, sondern bieten als Beispiele nur zwei Muster, welche Kombi-

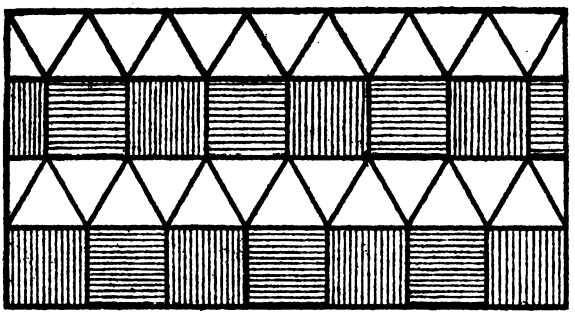


Fig. 19.

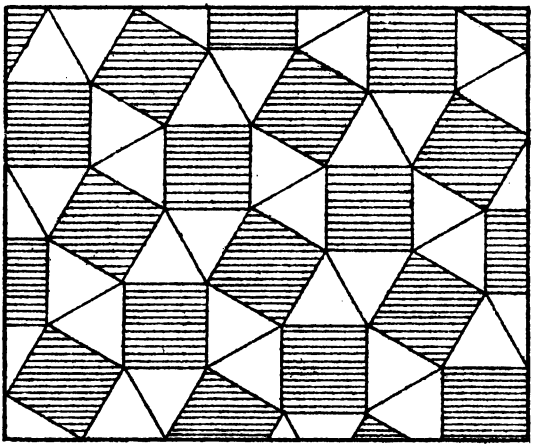


Fig. 20.

nationen der beiden zuletzt betrachteten Fälle (XIII und XV) darstellen: Fig. 23 und 24.[1])

1) Ich entnehme diese Figuren dem Werke von E. Fourrey, „Curiosités géométriques", Paris 1907, p. 371.

Eine mathematische Behandlung der Fragen dieses Kapitels wäre natürlich nur nach gruppentheoretischen Gesichtspunkten möglich; wir haben weder in der Darstellung noch in der Anordnung des Stoffes auf diesen Standpunkt Rücksicht genommen.

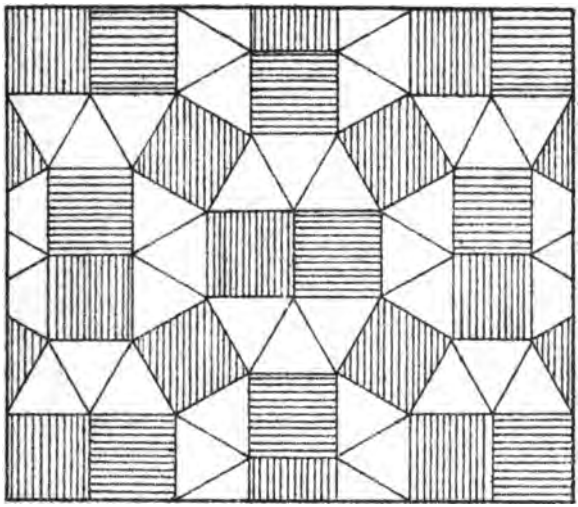


Fig. 21.

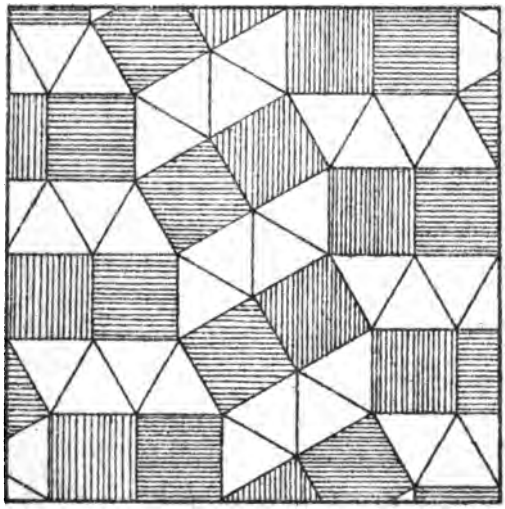


Fig. 22.

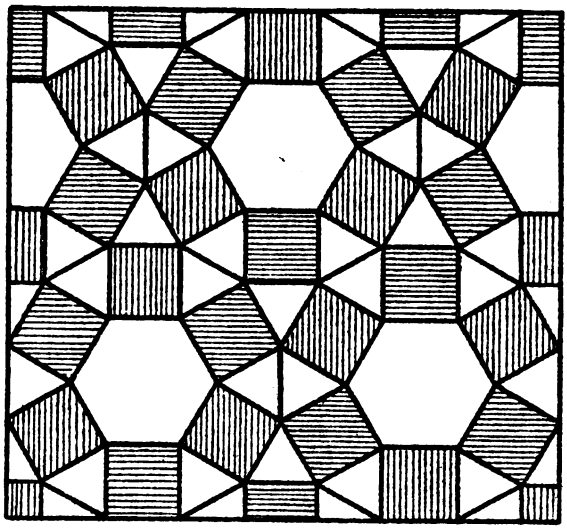


Fig. 23.

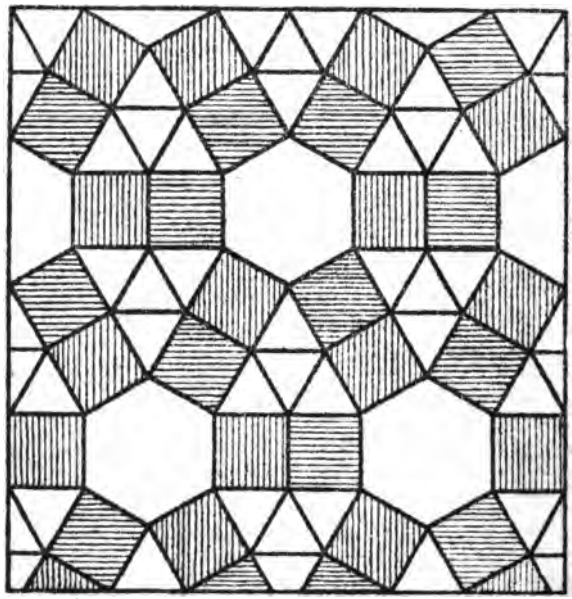


Fig. 24.

Kapitel VI.

Einige kleinere Unterhaltungen.

L'esprit du Jeu n'est pas estimé ce qu'il vaut. Il est vrai qu'il est un peu deshonoré par son objet, par son motif, et par la plûpart de ceux qui le possédent; mais du reste il ressemble assés à l'Esprit géométrique. Il demande aussi beaucoup d'étendue pour embrasser à la fois un grand nombre de différens rapports, beaucoup de justesse pour les comparer, beaucoup de sûreté pour déterminer le résultat des comparaisons, et de plus une extrême promptitude d'opérer.

Fontenelle, Eloge de M. de Montmort.
Oeuvres, t. VI, 1758, p. 61.

§ 1. Ein Bachetsches Spiel.

Eine Person A nennt eine beliebige Zahl, jedoch höchstens 10; eine zweite Person B nennt darauf eine größere Zahl, die mindestens um 1 und höchstens um 10 größer ist als die von A genannte. Dann nennt wieder A eine Zahl, die mindestens um 1 und höchstens um 10 größer ist als die zuvor von B genannte und so abwechselnd fort. Sieger ist derjenige, der 100 erreicht.

Bei diesem Spiel, das wohl zuerst bei Bachet in dessen „Probl. plaisants et délectables“[1]) näher behandelt ist, sind die Chancen

1) Bachet, Probl. XXII, 2. Ausg., 1624, p. 170 = 4. Ausg., 1879, p. 115. Von hier ab findet das Spiel sich in der ganzen einschlägigen Literatur: ich nenne von der älteren beispielsweise die im liter. Index verzeichneten Schriften von Mydorge (Ausgabe 1639, l. c. p. 116 bis 117), Tylkowski (Ausgabe 1689, l. c. p. 196), Pescheck (1717, l. c. Teil I, p. 12—13), Witgeest (1718, l. c. p. 490—492 unter Hinweis auf Ozanam). — In dem „Dictionnaire encyclopédique des amusemens des sciences mathématiques et physiques“ (Paris 1792), p. 823—825 in einem Artikel von Henri Decremps und ebenso in dem „Dictionnaire des jeux mathématiques ... suite du dictionnaire des jeux“ (Paris 1799), p. 188 heißt das Spiel „Piquet à cheval“, ein Name, der sich von da ab auch in der deutschen Literatur findet (s. z. B. nach dem liter. Index die Schriften von Bleibtreu, 1824, l. c. p. 6 und Müser, 1831, l. c. p. 7).

der beiden Spieler nicht gleich, vielmehr kann, wenn das Spiel in der hier angegebenen Form gespielt wird, der Beginnende stets, gleichgültig wie der Gegner verfährt, den Sieg erzwingen. Um eine anschaulichere Vorstellung zu gewinnen, stellen wir uns das Spiel nicht als ein Wettzählen, sondern unter dem Bilde des Wettspringens vor. Im übrigen bleibe alles unverändert. Als Maßeinheit diene etwa der Fuß; die maximale Sprungweite der beiden Spielenden beträgt also 10 Fuß, die minimale 1 Fuß; Bruchteile der Maßeinheit bleiben unberücksichtigt; die Sprungbahn geht von 0 bis 100 Fuß; jeder Sprung reiht sich unmittelbar an den vorhergehenden des Gegners an.

Man erkennt sofort, daß der Zielpunkt 100 mit Sicherheit für denjenigen erreichbar ist, der zuvor auf 89 gelangt ist (s. Fig. 1). Denn wenn der eine, sagen wir A, gerade bis 89 gekommen ist, so trennt den Gegner B vom Ziel noch eine

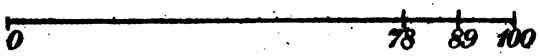


Fig. 1.

Distanz, die seine maximale Leistungsfähigkeit noch um 1 Fuß übersteigt. B selbst kann also mit dem nächsten Sprunge das Ziel nicht erreichen; andererseits ist er aber nach der Spielregel verpflichtet, mindestens 1 Fuß weit zu springen. Mag er nun bis 90, 91, 92 ... oder im äußersten Falle bis 99 springen, in jedem Falle kann A mit dem nächsten Sprunge das Ziel erreichen. — Ist nun das Ziel 100 von 89 aus mit Sicherheit zu erreichen, so ist 89 wieder von 78 aus sicher zu erreichen, und so geht dies offenbar fort durch Stufen von je 11, also durch 67, 56 ... bis 12 und schließlich 1. Springt also der Beginnende beim ersten Mal auf 1, so führt ihn von hier aus eine konstante Sprungstufe, die gleich 11 Fuß, der Summe der maximalen und der minimalen Sprungweite, ist, durch 12, 23, 34, ... 78, 89 mit Sicherheit zum Ziel 100.

Statt der hier angenommenen Zahlenwerte für die maximale und die minimale Sprungweite, sowie für Anfangs- und Endpunkt der Bahn können natürlich auch andere gewählt

werden, etwa in der Absicht, durch beständigen Wechsel in diesen Zahlenwerten dem des Spiels unkundigen Gegner das Spielprinzip zu verschleiern. Als ein Beispiel einer anderen Spielform, zugleich in anderer Einkleidung, mag das folgende Spiel angegeben werden:

Zwei Spieler *A* und *B* nehmen von einem Haufen von 40 Streichhölzern abwechselnd eine Anzahl Streichhölzer fort und zwar jedesmal mindestens zwei und höchstens fünf. Sieger ist derjenige, der das letzte Streichholz nimmt.

Die „Sprungstufe", die hier zum Siege führt, ist 7 (maximale + minimale Sprungweite); *A* wird also zunächst fünf Streichhölzer nehmen und dann durch die Stationen 12, 19, 26, 33 zum sicheren Siege fortschreiten.

Wird die Spielregel so abgeändert, daß derjenige, der das letzte Streichholz nimmt, als Verlierer gilt, so wird *A* mit 3 Streichhölzern beginnen und dann wieder mit derselben „Sprungstufe" 7 durch die Stationen 10, 17, 24, 31 zu 38 fortschreiten, um dem Gegner so 2 Hölzer — das Minimum eines „Sprunges" — zurückzulassen, die dieser dann nehmen muß.

Ist zufällig die Länge der Sprungbahn ein Vielfaches der Sprungstufe, ist z. B. in unserer ursprünglichen Aufgabe 99 statt 100 der Endpunkt, alles andere aber ungeändert, so kann der Beginnende den Sieg nicht mehr erzwingen, wohl aber der zweite Spieler, da er durch seinen ersten Sprung auf 11 und von hier in Stufen von je 11 zu 99 gelangen kann. — Diesem Falle gleichzuachten ist es offenbar, wenn die Sprungbahn = 100 und auch im übrigen alles wie im ersten Falle (S. 145) ist, jedoch derjenige, der 100 erreicht, als Verlierer gilt; das Ziel des Siegers ist alsdann eben 99.

In der Regel kann also der beginnende Spieler, in den angegebenen Ausnahmefällen und nur in diesen der zweite den Sieg erringen.[1])

1) Die Theorie unseres Spiels wurde noch neuerdings zum Gegenstand einer Fragestellung gemacht (Arch. Math. Phys. (3) 4, 1903, p. 350, Aufg. 74; Antwort ibidem 5, 1903, p. 175).

§ 2. Mutus dedit nomen cocis.

Das weit und breit bekannte Kartenkunststück mit dem obigen Zauberspruch [1]) besteht darin, **daß einer der Anwesenden unter 20 paarweise zusammengenommenen Karten sich ein Paar denkt und der Spielende nachher angibt, welches die gedachten Karten waren.** Um dies zu ermitteln, verfährt er folgendermaßen: Er nimmt die Karten zunächst so zusammen, daß die eines Paars immer zusammenbleiben, und legt sie dann in 4 Reihen von je 5 so auf den Tisch, daß, wenn er sich die Stichworte in der Form

m u t u s
d e d i t
n o m e n
c o c i s

geschrieben denkt, die zu einem Paar gehörigen Karten auf solche Stellen zu liegen kommen, an denen hier gleiche Buchstaben stehen, also z. B. als erste (von links ab) Karte der ersten und als dritte der dritten Reihe (*m*). Fragt der Spieler jetzt die betreffende Person, in welcher bzw. in welchen Reihen die gedachten Karten liegen, so ist er nach der Antwort in der Lage, die Karten anzugeben.

In unserem Merkspruch kommen nämlich entsprechend den 10 Paaren Karten gerade 10 verschiedene Buchstaben vor, jeder gerade zweimal. Jede Reihe enthält gerade einen Buchstaben doppelt, nämlich die erste *u*, die zweite *d*, die dritte *n* und die vierte *c*, und irgend 2 Reihen haben auch immer gerade einen gemeinsamen Buchstaben, z. B. die beiden ersten Reihen das *t* und nur dieses, die 2. und 4. Reihe *i* usw.

Damit die Anwesenden den Trick des Spielers nicht bemerken, kann dieser natürlich von einem Male zum anderen die

---

1) Das Spiel — ohne Stichworte, mit einer durch Zahlen ausgedrückten Spielvorschrift — findet sich schon bei Bachet, „Problèmes plaisants" etc., 2. Ausg. (1624), p. 148—151 = 4. Ausg. (1879), p. 80—83.

Reihenfolge der 4 Schlüsselworte ändern, also beim zweiten Mal etwa *dedit cocis nomen mutus* als Stichwort nehmen und nun dementsprechend die Karten anders legen.

Das Kunststück ist natürlich auch nicht an die Zahl 20 gebunden, sondern läßt sich auch mit anderen geradzahligen Mengen von Karten vornehmen. Wir wollen zunächst eine beliebige gerade Zahl voraussetzen; diese mag $= n \cdot m$ sein, so daß wir die Karten jedenfalls in n Reihen zu je m hinlegen können. Ist die Anzahl der Karten das Doppelte einer Primzahl, kann also n nur $= 2$ gewählt werden, so wird freilich das Spiel trivial, indem alsdann in jeder Reihe nur ein Paar zusammengehöriger Karten und weiter nichts liegt. Nach Erwähnung dieses Grenzfalles wollen wir jedoch nach den an sich möglichen Fällen nicht weiter fragen, sondern uns gleich dem Fall zuwenden, daß, wie bei unserem ursprünglichen Beispiel, jede Reihe nicht nur sich selbst, son dern auch jeder anderen gerade einmal zugeordnet sein soll in dem Sinne, daß beide je eine Karte eines „Paars" enthalten; dann muß offenbar $m = n + 1$, also die Anzahl der Karten eine Zahl von der Form $n(n + 1)$ sein.[1]) Wenn es nun auch nicht immer möglich sein wird, für jeden Fall einen passenden Merkspruch zu finden, so können wir doch eine übersichtliche Anordnung leicht bekommen, indem wir folgendes festsetzen. Die beiden zusammengehörigen Karten, die für die $i$te und $k$te Reihe bestimmt sind, sollen dort so plaziert werden, daß in der $i$ten Reihe der $k$te Platz und in der $k$ten Reihe der $i$te Platz von ihnen besetzt wird. Dann bleibt in jeder Reihe der letzte Platz leer, außerdem in der ersten der erste, in der zweiten der zweite usw.; auf diese Plätze kommt dann immer das Paar, das in derselben Reihe untergebracht werden soll. Man erhält so z. B. für 42 Karten ($n = 6$) folgende Anordnung:

---

1) Bachet behandelt a. a. O. diesen Fall an der Hand mehrerer Beispiele.

1	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	1
a	2	*f*	*g*	*h*	*i*	2
b	*f*	3	*k*	*l*	*m*	3
c	*g*	*k*	4	*n*	*o*	4
d	*h*	*l*	*n*	5	*p*	5
e	*i*	*m*	*o*	*p*	6	6,

wobei die Paare von Karten, die in derselben Reihe liegen, durch Zahlen, alle anderen durch Buchstaben bezeichnet sind.

Selbstverständlich kann man das Spiel auch nach der Richtung hin verallgemeinern, daß man statt der „Paare" eine andere Anzahl zusammengehöriger Objekte, etwa das Trifolium, wählt.[1]) Als Merkspruch für 8 Gruppen von je 3 Karten, angeordnet in 4 Reihen zu je 6, schlägt Ball[2]) z. B. vor: *Lanata levete livini novoto.* Bezeichnen wir die 4 Reihen durch 1, 2, 3, 4, so sind die in verschiedenen Reihen vorkommenden Buchstaben — es sind gerade die Konsonanten — den Reihen folgendermaßen zugeordnet:

$$\begin{array}{l} l : 1, 2, 3. \\ n : 1, 3, 4. \\ t : 1, 2, 4. \\ v : 2, 3, 4. \end{array} \qquad \text{(I)}$$

Wird dem Ratenden also angegeben, daß die gedachten 3 Karten in der ersten, zweiten und vierten Reihe liegen, so weiß er, daß sie auf den Plätzen des Buchstaben *t* sich befinden usf. Würde ihm nur angegeben, daß die Karten in der ersten und vierten Reihe liegen, so würde er noch zwischen *n* und *t* zu schwanken haben.

Soll bereits die Angabe zweier Reihen genügen, so dürfen in den Kombinationen zu drei Zahlen, wie wir sie im obigen Schema I haben, je zwei Zahlen nie mehr als einmal zusammen

1) Beispiele hierfür finde ich zuerst (?) bei Ephraim Salomon Unger, „Arithmetische Unterhaltungen" (Erfurt 1888), p. 234—235.

2) „Mathematical Recreations", 1892, p. 101 = Französ. Übers. v. Fitz-Patrick, p. 171; 2. Ausg., T. II, 1908, p. 146.

vorkommen; sollen sie andererseits aber auch mindestens einmal zusammen vorkommen, so werden die Kombinationen offenbar ein sogenanntes „Tripelsystem" darstellen müssen, wie es uns bereits bei der Theorie des Nimspiels begegnet war (s. besonders S. 78, Anm. 1). Gehen wir von einem einfachen Tripelsystem aus[1]):

1, 2, 3; 1, 4, 5; 1, 6, 7; 2, 4, 6; 2, 5, 7; 3, 4, 7; 3, 5, 6,

und lassen wir den Tripeln der Reihe nach entsprechen die Buchstaben:

a *b* *c* *d* *e* *f* *g*,

so kommen wir etwa zu folgender Anordnung (42 Karten in 7 Reihen zu je 6):

1	*a*	1	*b*	1	*c*
a	2	2	*d*	*e*	2
a	3	3	*f*	*g*	3
b	*d*	*f*	4	4	4
b	*e*	*g*	5	5	5
c	*d*	*g*	6	6	6
c	*e*	*f*	7	7	7.

Der Buchstabe *d* z. B. entspricht, wie angegeben, der Kombination 2, 4, 6; wir haben ihn daher, um einen mnemotechnischen Anhalt zu gewinnen, in der zweiten Reihe an die vierte Stelle, in der vierten und sechsten an die zweite Stelle gesetzt. Die hierbei noch leer gebliebenen Plätze verbleiben denjenigen Trios, deren 3 Karten in dieselbe Reihe kommen; wir haben sie wieder durch Zahlen bezeichnet. — Wird nun dem Ratenden angegeben, daß zwei der gedachten Karten in der dritten Reihe liegen, so weiß er sofort, daß auch die dritte dort liegt, und er entnimmt die drei den drei Plätzen 3; wird ihm angegeben, daß eine der gedachten Karten in der siebenten, eine zweite in der fünften Reihe liegt, so weiß er sofort auf grund seines

1) Es ist das Schema der „richtigen Positionen" S. 75, soweit die darin vorkommenden Zahlen ≤ 7 sind.

ihm gegenwärtigen Tripelsystems, daß die dritte Karte in der zweiten Reihe liegt, und er entnimmt sie dort dem fünften, die der fünften und siebenten Reihe dagegen dem zweiten Platze.

§ 3. Ein Kartenkunststück Monges.

Que les Joueurs ne s'enorgueillissent pas, de ce que de grands Géomètres se sont amusés, dans leurs Récréations Mathématiques, à résoudre quelques problêmes sur les différens jeux: les Buffon et les d'Alembert, qui font tant d'honneur à la France et à leur siècle, n'ont pas prétendu seconder les passions abjectes, sans cesse combattues par leur conduite et leurs écrits.

DUSAULX
„De la passion du jeu, depuis les temps anciens jusqu'à nos jours" (Paris 1779), t. I, Préface, p. XXIV.

In jener Welt, die das „Corriger la fortune" mit Riccaut de la Marlinière für ein erlaubtes Mittel der Selbsthilfe hält, bezeichnet man wohl als „mathematisches Mischen" ein Mischen der Karten, bei dem die Aufeinanderfolge aller Karten ungeändert bleibt und nur scheinbar gemischt, in Wirklichkeit nur einige Male abgehoben wird, so daß der Bankhalter vorher wissen kann, wie die Karten laufen werden. Mit allem anderen eher als mit der „Mathematik" hat dies Manöver etwas gemein. Weit mehr verdiente jenen Namen dagegen ein systematisches Verfahren des Mischens, das der berühmte Mathematiker Monge[1]) anwendet, um eine bestimmte Karte zu ermitteln, die sich jemand anders unter einer gewissen Anzahl von Karten gedacht hat, wobei tatsächlich die Karten jedesmal gemischt, schließlich jedoch alle wieder in die ursprüngliche Stellung zurückgeführt werden. Man verfährt folgendermaßen: Derjenige, der sich die Karte gedacht hat, nimmt alle zu einem Pack zusammen und gibt an, die wievielte von oben die gedachte ist. Dann mischt der Ratende die Karten mit abgewandten Bildseiten und verändert damit ihre Reihenfolge völlig. Dies Mischen geschieht aber nun ganz systematisch, indem die zweite Karte auf die erste, die dritte unter die erste, die vierte auf die

1) „Réflexions sur un tour de cartes", Mém. de math. et de phys. présentés à l'académie des sciences de Paris 1773, p. 390—412.

zweite, die fünfte unter die dritte usw. gelegt wird. Aus der Reihenfolge 1 2 3 4 5 6 7 8 z. B. wird so 8 6 4 2 1 3 5 7. Dann wird wieder von neuem ebenso gemischt usf. Da nun bezüglich der Reihenfolge der Karten immer nur eine endliche, wenn auch vielleicht sehr große Anzahl von Möglichkeiten besteht, so muß man schließlich, wenn auch vielleicht erst nach sehr langer Zeit, einmal wieder zu irgendeiner schon dagewesenen Anordnung kommen. Diese kann aber nur aus derselben Anordnung hervorgehen, aus der auch jene andere, mit ihr übereinstimmende hervorgegangen war, und durch Fortsetzung dieses Schlusses ergibt sich, daß diejenige Anordnung, die zuerst wiederkehrt, gerade die ursprüngliche ist. Der Ratende muß nur wissen, nach wievielmaligem Mischen dies bei seiner Anzahl Karten eintritt, und er kann dann, da ihm ja die Platznummer der gedachten Karte in der ursprünglichen Anordnung angegeben war, die betreffende Karte bezeichnen. Bei 10 Karten ist z. B. 6-maliges Mischen nötig, wie folgendes Schema zeigt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	6	4	2	1	3	5	7	9
9	5	1	4	8	10	6	2	3	7
7	2	10	4	5	9	1	8	6	3
3	8	9	4	2	7	10	5	1	6
6	5	7	4	8	3	9	2	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

Die Zahlen jeder Vertikalen, von unten nach oben gelesen, geben die Platznummern an, welche die oberste Zahl der betreffenden Vertikalen nach den verschiedenen Mischungen einnimmt; so befindet sich 1 in dem obigen Beispiel sukzessive auf den Plätzen 1, 6, 3, 7, 9, 10, 1. Welcher Art nämlich die Vertauschungen sind, die durch das Mischen entstehen, ersehen wir, indem wir irgend zwei aufeinanderfolgende Reihen vergleichen. So zeigen uns die beiden letzten, daß die an erster Stelle stehende Zahl (6) durch einmaliges Mischen an die sechste

Stelle kommt; es ist daher 6 die zweite Platznummer von 1. Dagegen sehen wir aus der dritten und letzten Reihe, daß die erste Zahl (3) durch 2 Mischungen an die dritte Stelle gelangt; 3 ist also die dritte Platznummer von 1 usw.

Ist die Anzahl der Karten ungerade, so behält die letzte Karte auch stets den letzten Platz. Wir dürfen eine solche Karte gewissermaßen als überzählig ansehen, dürfen uns also auf die Fälle einer geraden Anzahl von Karten beschränken. Aus den von Monge angestellten Betrachtungen über die in den einzelnen Fällen erforderliche Anzahl der Mischungen[1]) stellen wir nur die Resultate für die einfachsten Fälle kurz tabellarisch zusammen:

Anzahl der Karten	Anzahl der Mischungen
2	2
4	3
6	6
8	4
10	6
12	10
14	14
16	5
18	18
20	10.

1) Siehe Monge, l. c. p. 396. — Mit einer rationellen Methode zur Bestimmung dieser Zahl beschäftigen sich Bunjakofskij, „Sur un problème de position, relatif à la théorie des nombres", Bull. de la classe physico-mathématique de l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg XVI, 1858, p. 67—78 und Bourget, „Sur un problème de permutations successives nommé Battement de Monge", Journal de mathém., 3ième série, VIII, 1882, p. 413—434; s. a. G. Bellavitis, Atti Istituto Veneto (3) VI, 1860/1861, p. 193—195 (Titel s. liter. Index). — Übrigens ist die erforderliche Anzahl der Mischungen höchstens gleich der der Karten, welcher Maximalwert von den oben angeführten Fällen z. B. bei 14 und 18 Karten erreicht wird. Wenn nämlich die erste Karte an ihren Platz zurückkehrt, so sind auch alle anderen wieder an ihren ur-

Selbstverständlich handelt es sich hier um Iterationen einer Substitution, wenn auch Monge von der ihm noch nicht zu Gebote stehenden Terminologie der Substitutionentheorie natürlich keinen Gebrauch macht. Ist $2n$ die Anzahl der Karten, so ist $\binom{n-i+1}{2i} ; \binom{n+i}{2i-1}$, $i = 1, 2 \ldots n$ oder $\binom{n+1-(-1)^k \cdot \left[\frac{k}{2}\right]}{k}$, $k = 1, 2 \ldots 2n$ (Bedeutung der eckigen Klammer s. S. 86) der analytische Ausdruck dieser Substitution.

Monge stellt eingehende Untersuchungen darüber an, welche Karten bei jedem Mischen ihren Platz beibehalten, und weiter, wann Gruppen von 2, 3, 4 Karten existieren, die bei jedem Mischen ihre Plätze nur zyklisch unter sich vertauschen. Die Bedingung dafür, daß eine Karte stets ihren Platz behält, ist in der obigen Bezeichnungsweise: $n - i + 1 = 2i$ oder $i = \frac{n+1}{3}$, was die Fälle der 2., 4., 6., 8. Karte bei bzw. 4, 10, 16, 22 Karten usw. liefert. Die Lage einer solchen invarianten Karte in einem Paket bestimmt sich also, wie die einfache Rechnung zeigt, dadurch, daß der Karte doppelt so viele andere Karten folgen, wie ihr voraufgehen[1]); abgesehen wird dabei natürlich von der ja auch stets invarianten letzten Karte in einem Paket von ungerader Anzahl. Läßt man also jemanden z. B. aus einem Paket von 10 Karten eine wählen und läßt ihn diese dann verdeckt wieder in den Haufen legen, und zwar an die vierte Stelle, so kann man ihm, auch nachdem man beliebig oft in der angegebenen Weise gemischt hat, die ausgewählte

sprünglichen Plätzen (s. Bourget, l. c. p. 424); die erste Vertikale kann aber höchstens so viele verschiedene Zahlen aufweisen, wie Karten vorhanden sind. Ferner ergibt sich, daß die „Perioden" aller Karten Teiler von der Periode der 1 sein müssen.

1) Thomas de Saint-Laurent, „Mélanges ou battements réguliers de cartes", Mémoires de l'académie du Gard 1864/65, Nîmes, p. 505 zeigt allgemein, daß die letzte Karte einer Gruppe von Karten, die beim Mischen sich nur zyklisch miteinander vertauschen, doppelt so viel Karten unter sich hat, wie die erste über sich; in dem S. 153 von uns betrachteten Beispiel von 10 Karten ist 2, 5, 8 ein solcher Zyklus, dessen erster Karte eine vorausgeht und dessen letzter zwei Karten folgen

Karte angeben, da dieselbe immer an der vierten Stelle verbleibt (s. a. das Schema 153).

Die ursprüngliche Stellung kehrt natürlich auch dann noch stets wieder, wenn irgendein anderes, wofern nur konstantes Mischungsgesetz zugrunde gelegt wird.[1]) Die Anzahl der hierfür erforderlichen Operationen bestimmt sich stets (natürlich auch in unserem obigen Falle) als kleinstes gemeinsames Vielfache mehrerer Zahlen, deren Summe gleich der Anzahl der Karten ist.[2])

§ 4. Onkel und Neffe.

Die folgenden Aufgaben zeigen zwar wenig Verwandtschaft zu den bisherigen Fragen dieses Kapitels, mögen jedoch, da sie sich auch den übrigen Kapiteln schwer einreihen, hier ihren Platz finden. In den schon mehrfach zitierten „Annales Stadenses" (Mitte des 13. Jahrhunderts), sowie in der dem Nicolas Chuquet zugeschriebenen Aufgabensammlung von 1484 findet sich folgende Aufgabe[3]): **Zwei Frauen hatten jede**

1) Die Erörterung eines solchen Spezialfalles zumal zieht sich durch die ganze Literatur und findet sich zuerst wohl bei Guyot, „Récréations phys. et mathém.", t. II, 1769, p. 86 ff.; deutsche Ausgabe, Bd. II, 1772, p. 87—96, hieraus wiederabgedruckt in Wieglebs „Natürlicher Magie", Bd. I, 1789, p. 402—409; s. a. das gleichfalls von Wiegleb herausgegebene, im liter. Index unter Nr. 109 aufgeführte Werk (l. c. col. 966—985); derselbe Fall auch im „Dictionnaire des jeux mathématiques", 1799 (s. liter. Index: Nr. 115), p. 176/177 usw. — Eine allgemeinere Betrachtung s. bei Thomas de Saint-Laurent, l. c. p. 515, zugleich auch (ibid. p. 525) unter Berücksichtigung des Bachet-Gergonneschen Verfahrens unseres Kap. III, § 5 (S. 98 ff.).

2) Siehe Vieth in Wieglebs „Natürlicher Magie", Bd. VIII, 1794, p. 294/295 (der ganze Abschnitt: „Über die künstlichen Kartenmischungen", l. c. p. 279—304, findet sich auch in Vieths „Vermischten Aufsätzen", 2. unveränd. Ausg., 1796, p. 83—116). Siehe a. Hudson, Educ. Times Repr. III, 1865, p. 105.

3) „Annales Stadenses", herausgegeben von J. M. Lappenberg in den „Monumenta Germaniae historica", Scriptorum t. XVI (Hannover 1859), p. 335. — Appendix zum „Triparty" Chuquets, herausgegeben von Aristide Marre, Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche 14, 1881, p. 460, Aufg. 166. Die oben gewählte Einkleidung der Aufgabe findet sich in der zuletzt zitierten Quelle. —

einen kleinen Sohn auf dem Arm und als man sie fragte, von wem die Söhne seien, antworteten sie: Es sind unsere Söhne, Söhne unserer Söhne und Brüder unserer Gatten und alles in durchaus gesetzlicher Ehe. Wie ist dies möglich?

Die beiden Frauen mögen durch a, b bezeichnet werden; der kleine Sohn der a sei I und dessen Vater A, der kleine Sohn der b sei II und sein Vater B. Wir drücken dies Verwandtschaftsverhältnis so aus:

$$\begin{array}{cc} A \sim a & B \sim b \\ | & | \\ I & II \end{array}$$

Da die Söhne zugleich die Söhne von den Söhnen der Frauen a und b sein sollen und A nicht der Sohn seiner Frau a — wenigstens in den Kulturländern und bei „gesetzlicher Ehe", wie es in der Aufgabe heißt — sein kann, so muß A der Sohn der Frau b und B der Sohn der Frau a, etwa aus früheren Ehen mit bzw. den Männern A' und B', sein:

$$\begin{array}{cc} A' \sim a & B' \sim b \\ | & | \\ B & A. \end{array}$$

Wir haben also dann folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{cc} A' \sim a & B' \sim b \\ | & | \\ B \sim b & A \sim a \\ | & | \\ II & I. \end{array}$$

Der Knabe I ist dann der Sohn von a und der Enkel von b (Sohn des Sohns), der Knabe II ist der Sohn von b und der Enkel (Sohn des Sohns) von a. Zugleich ist II der Halbbruder von A, dem Gatten der Frau a, da beide — II und A — dieselbe Mutter (b) haben; ebenso ist I der Halbbruder von B, dem Gatten der Frau b, womit die obigen Angaben

---

Hinsichtlich des Alters dieser Fragen s. auch die Anm. 1, S. 161, und jedenfalls ist bezüglich der „Annales Stadenses" auch hier die bereits S. 105, Anm. 1 gemachte Bemerkung am Platze.

sämtlich bestätigt sind. Die Frau *a* kann also zu dem Knaben *II* und ebenso die Frau *b* zu dem Knaben *I* sprechen, wie es in den „Annales Stadenses“[1]) heißt:

Care puer sedeas, tibi qui pater, est mihi natus;
Meque vocas aviam, tibi fratrem dico maritum.

In welchem Verwandtschaftsverhältnis stehen nun die Knaben *I* und *II* zueinander? *I* ist der Halbbruder von *B*, dem Vater des *II*, also *I* der Onkel des *II*; andererseits ist aber *II* als Halbbruder von *A* auch der Onkel von *I*. *Jeder der beiden Knaben ist also zu gleicher Zeit Onkel und Neffe des anderen.* — Es sei auch gleich die Frage aufgeworfen, in welchem Verwandtschaftsverhältnis die Männer *A* und *B* zueinander stehen. *A* ist der Sohn von *b*, der Frau des *B*, also *A* Stiefsohn des *B* und ebenso *B* Stiefsohn des *A*. *Jeder der beiden Männer ist also zugleich Stiefvater und Stiefsohn des anderen*[2]); jeder hat eben die Mutter des anderen geheiratet.

Die vorstehenden Betrachtungen führen uns dazu, zu fragen, ob nur unter den obigen oder allgemein unter welchen Verhältnissen der Fall eintreten kann, daß ein Knabe zugleich Onkel und Neffe eines anderen sei, oder, wenn wir die Frage mit den Worten des englischen Mathematikers Kirkman formulieren:

„Baby Tom of baby Hugh
The nephew is and uncle too.
In how many ways can this be true?“[3])

---

1) L. c. p. 335.

2) *A* ist als Stiefvater von *B* gewissermaßen der Stiefgroßvater auch von jedem Stiefsohn des *B*, also von sich selbst. In diesem Sinne ist die insbesondere in Jugendschriften häufige Frage: „Wie kann jemand sein eigener Großvater sein?“ zu verstehen.

3) Siehe Macfarlane, „Problem in relationship“, Edinb. Proc. XV 1888, p. 116/117, sowie die Lösungen von Biddle und Macfarlane in Educ. Times Repr., Bd. 49, 1888, p. 114—116. Macfarlane entwickelte, anknüpfend an De Morgan, Leslie Ellis und Boole, einen vollständigen „Verwandtschafts-Calcul“ (s. außer den schon erwähnten die

Die beiden Knaben seien wieder I und II; die beiderseitigen Eltern seien durch je einen darüber gesetzten Punkt (A resp. B in Fig. 2) angedeutet. Soll II der Onkel von I sein, so muß er mit einem der Eltern von I verschwistert sein, ein Verhältnis, das wir durch eine punktierte Linie zwischen II und A andeuten; das Entsprechende gilt dann offenbar auch umgekehrt zwischen I und B. Damit nun I mit B oder richtiger: dem einen Teil des Paares B — dieser mag hinfort auch kurz B heißen — verschwistert sei, muß von dem Elternpaar dieses B — nennen wir es D — wenigstens der eine Teil koinzidieren mit einem Teil des Paares A; dann wären I und B Halbgeschwister. Wir drücken dieses Verhältnis, das also darin besteht, daß der eine Teil von A mit dem einen Teil von D identisch ist, durch eine ausgezogene Linie aus und sehen, daß vice versa Entsprechendes für B und C, wenn wir mit C das Elternpaar des betreffenden Teils von A bezeichnen, gilt. — Daß I und B Vollgeschwister seien, daß also die Ehepaare A und D völlig koinzidierten, ist ausgeschlossen; denn alsdann wäre das Paar A ($= D$) das Elternpaar für den einen Teil von B, also C ein Großelternpaar für diesen einen Teil von B; wir hätten, wenn wir die weiblichen Teile der betreffenden Paare durch kleine Buchstaben bezeichnen, also etwa folgendes Verhältnis:

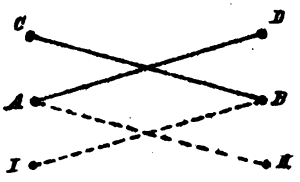


Fig. 2.

$$\begin{array}{l} C \sim c \\ \quad | \\ \quad a \sim A \\ \quad\quad | \\ \quad\quad b \sim B. \end{array}$$

Der ausgezogenen Linie zwischen B und C in Fig. 2 zu-

---

im literarischen Index aufgeführten Arbeiten Macfarlanes aus den Jahren 1880—1883). — Vgl. a. ein Referat über einen Vortrag Brunels mit zahlreichen, der obigen verwandten Fragen in den Mém. de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux (4) IV (1894), Extraits des procès-verbaux des seances, 1892/1893, p. XXV/XXVI.

folge soll nun aber der eine Teil des Paares B, b mit dem einen Teil des Paares C, c identisch sein; die Annahme $b = c$ ist widersinnig, die: $B = C$ ungesetzlich, da der Mann B ($= C$) alsdann mit seiner natürlichen Enkelin b verbunden wäre. — Entsprechendes gilt für die anderen, nur durch Vertauschung der Geschlechter (B und b) von dem vorstehenden unterschiedenen Fälle.

Die Ehepaare C und B einerseits und D und A andererseits stimmen also nur in dem einen Teil überein und demzufolge sind sowohl der eine Teil von A und II, wie auch der eine Teil von B und I Halbgeschwister, nicht Vollgeschwister. Es ensteht nun weiter die Frage: können D die Eltern von demjenigen Teil von B sein, der auch dem Paare C angehört? In diesem Falle wären D also die Eltern von einem Teil des Paares C, also die Großeltern von einem Teil von A, d. h. wir hätten etwa:

$$\begin{array}{ccccc} & & D \sim d & & \\ & & | & & \\ C & \sim & c & \sim & B \\ & & | & & \\ & & A \sim a, & & \end{array}$$

was jedoch, da ein Teil von D, d mit einem Teil von A, a identisch sein soll, unmöglich oder wenigstens ungesetzlich wäre. Es sind also notwendig C resp. D die Eltern von denjenigen Teilen der Ehepaare A resp. B, die nicht in den Ehen D resp. C vorkommen. Wir wollen daher unter A resp. B jetzt nur diesen letzteren Teil des Paares verstehen und begreifen den anderen Teil unter D resp. C ein, wo er ja auch noch vorkommt. Danach ergeben sich nun schließlich folgende 3 Lösungen unserer Frage:

a) A und B sind Männer: *2 Männer A und B heiraten jeder die Mutter des anderen; die aus diesen beiden Ehen hervorgehenden Söhne sind zugleich Onkel und Neffe voneinander.*

b) A und B sind Frauen: *2 Frauen heiraten jede den Vater der anderen; usw.*

c) *A* ist ein Mann und *B* eine Frau: *ein Mann A heiratet die Mutter einer Frau B, die selbst wiederum mit dem Vater des A sich verbindet*[1]); *usw.*

Der erste der 3 Fälle ist zugleich derjenige, von dem wir in diesem Paragraphen ausgingen, und in der ältesten der beiden dort zitierten Quellen, den „Annales Stadenses", findet sich auch der zweite der 3 Fälle.

Daß diese Betrachtungen nicht an das Geschlecht geknüpft sind und daß die Frage: Wann ist ein Mädchen zugleich Tante und Nichte eines anderen Mädchens oder eines Knaben? dieselben 3 Lösungen besitzt, bedarf keiner Erwähnung.

In den „Annales Stadenses"[2]) findet sich ferner noch die folgende Aufgabe:

Ein Wanderer begegnete einem seltsamen Zuge: voran schritten 12 Greise (*G*), ihnen folgten 12 Männer mittleren Alters (*M*), darauf 12 Jünglinge (*J*), den Schluß machte ein im höchsten Alter stehender Greis (*A*) mit einer noch jungen Frau (*a*). Der Greis (*A*) sprach zu dem Wanderer: Diese Frau (*a*) ist meine Ehefrau, die 12 Jünglinge (*J*) sind meine und ihre Söhne, die 12 Männer (*M*) sind meine Söhne und ihre

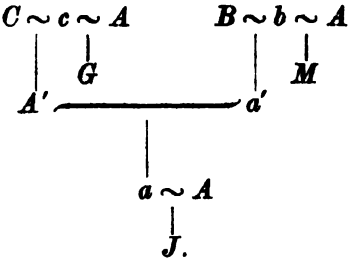
---

1) Dieser Fall als Frage: Eine Witwe und ihre Tochter heiraten zwei Männer, die Vater und Sohn sind, und zwar die Mutter den Sohn, die Tochter den Vater; wie sind die aus diesen Ehen hervorgehenden Söhne miteinander verwandt? begegnet uns in einer Ausgabe der Opera Bedae Venerabilis, Köln 1612, t. I: „De arithmeticis propositionibus" (col. 103). Da der Frage eine Antwort nicht beigegeben ist, so hat sie für uns kein sonderliches Interesse; wir brauchen daher der Frage, ob diese Schrift dem Beda oder Alcuin oder keinem von beiden zuzuschreiben ist (vgl. S. 1, Anm. 2), nicht näher zu treten und auch nicht zu untersuchen, woran es liegt, daß in den Opera Alcuini, Tomi secundi volumen secundum, 1777, p. 442 resp. in der ihr zugrunde liegenden und unter dem Namen Alcuins gehenden Münchener Handschrift diese Stelle fehlt. Weitere Literatur habe ich daher hierüber nicht zu Rate gezogen.

2) Siehe „Monumenta Germaniae historica", l. c. p. 335.

Mutterbrüder und die 12 Greise (G) sind meine Söhne und ihre Vaterbrüder.[1]) Wie ist dies möglich?

Die Lösung ist leicht zu finden und mag durch folgendes Schema veranschaulicht werden:



A war also in erster Ehe mit einer Frau c verheiratet; aus dieser Ehe sind die 12 Greise G hervorgegangen. Die Frau c war jedoch vor dieser Ehe bereits verheiratet gewesen mit dem Manne C und hatte von diesem den Sohn A'. — In zweiter Ehe heiratete A nun die Frau b; aus dieser Ehe gingen die 12 Männer M hervor. Die Frau b war vor dieser Ehe bereits verheiratet gewesen mit dem Manne B, von dem sie die Tochter a' hatte. — A' und a' sind die Eltern von a, der dritten Frau des A; aus dieser Ehe $a \sim A$ sind die 12 Jünglinge J hervorgegangen. — Man sieht, daß die Greise G die Halbbrüder von A', also die Vaterbrüder von a sind und die 12 Männer M die Halbbrüder der Frau a', also die Mutterbrüder von a.

1) In den „Annales Stadenses" l. c. sind in dem Énoncé der Aufgabe die Vaterbrüder („patrui") und Mutterbrüder („avunculi") verwechselt, die dort gegebene Lösung ist jedoch, unserem Wortlaut der Aufgabe entsprechend, richtig.

Kapitel VII.

Brettspiele.

Liebetraut. Dieß Spiel spielt' ich nicht, wenn ich ein großer Herr wär, und verböt's am Hof und im ganzen Land.
Adelheid. Es ist wahr, dieß Spiel ist ein Probierstein des Gehirns.

GOETHE.
„Götz von Berlichingen", Zweiter Akt.

Auf dem Schüler Philidor's lastet das Mißverhältnis zwischen seiner genialen Leistungsfähigkeit, die ihn in eine Linie mit den größten Männern der Weltgeschichte stellt, und dem geringen Spielraum eines hölzernen Brettes, mit welchem sie sich begnügen muß.

RUDOLF VON GUTTSCHALL.
„Der Schachspieler". Deutsche Schachzeitung, Bd. 45, 1890, p. 226.

Das Schachspiel ist eine mathematische Kombination, und das Schachbrett könnte zum Probierstiegel oder Kredenstück mathematischer Kräfte dienen.

JEAN PAUL.
„Levana oder Erziehlehre", 7. Bruchstück, § 135.

C'est à Commercy que Liouville a reçu l'instruction primaire; et il ne faut pas oublier que M. Rolin, son maître, lui prédit maintes fois qu'il ne ferait jamais rien, parce qu'il aimait trop le jeu. Il n'avait pas deviné que l'enfant qui jouait imperturbablement aux échecs pendant une journée entière, à l'exclusion des plaisirs de son âge, devait être un Pascal ou un Newton.

C. E. DUMONT.
„Histoire de la ville et des seigneurs de Commercy", t. III, Bar-le-Duc 1843, p. 433/4.

§ 1. Mathematik und Brettspiele.

Die ältesten Brettspiele in der Art, wie unser Dame- oder Mühlespiel, gehen schon bis ins graue Altertum zurück. Wenn auch die Erzählungen mancher Autoren, insbesondere über das interessanteste und feinste aller Brettspiele, das Schachspiel, zweifellos in das Reich der Mythe gehören, wie z. B. daß bereits Aristoteles Schach gespielt, Hippokrates und Galenus mittels des „königlichen Spiels" Heilungen ausge-

führt oder gar bereits Adam seinen Trost über den Tod Abels auf den 64 Feldern gesucht habe[1]), — so haben wir doch sichere Belege dafür, daß in Ägypten bereits zur Zeit der Pharaonen eine Art Damespiel gepflegt wurde, wovon noch jetzt erhaltene Spielbretter Zeugnis ablegen; daß ferner bereits die Freier der Penelope „mit Steineschieben ihr Herz erfreuten“[2]) und daß bei den Römern ein Brettspiel, „ludus latrunculorum“ genannt, in Gebrauch war, das allerdings nach Ansicht des berühmten Schachtheoretikers v. Heydebrand und der Lasa[3]) mit der in der Odyssee erwähnten πεττεία wohl identisch war.

Es kann und soll selbstverständlich nicht unsere Aufgabe sein, alles das, was bereits über die Theorie der genannten und anderer Brettspiele feststeht, wiederzugeben; ist doch allein die Theorie des Schachspiels so umfangreich, daß sie ein eigenes mühevolles Studium erfordert. Auch verdienen gerade kompliziertere Spiele, wie das Schachspiel, vom rein mathematischen Standpunkte aus betrachtet, kein so großes Interesse, da eine abschließende, alle nur möglichen Fälle umfassende Theorie kaum denkbar ist und für das Schach z. B. nicht im geringsten vorliegt, auch schwerlich jemals gewonnen werden wird, wir meinen eine Theorie, die genau für jede nur denkbare Position den absolut besten Zug angeben würde und die etwa als Resultat ergeben würde, daß der Anziehende stets siegen muß[4])

---

1) Siehe Antonius van der Linde, „Geschichte und Litteratur des Schachspiels“, 1874, Bd. I, p. 13 (Schachmythologie).

2) Odyssee I, 106—107:

„Jetzo fand sie die Freier, die üppigen, die vor des Hauses
Doppelter Pfort' ihr Herz mit Steineschieben erfreuten.“ (J. H. Voß).

3) Berliner Schachzeitung, 2. Jahrg., 1847, p. 241—246.

4) Schon ältere Schachtheoretiker, wie der berühmte Philidor (1727—1795) und der noch weit ältere Pietro Carrera (1617), haben die Ansicht vertreten, daß bei absolut richtigem Spiel der Anziehende stets gewinnen müsse (s. einen Artikel von der Lasas, „Über den Vortheil des Anzuges“, Schachzeitung 14, 1859, p. 1—3). Aus neuerer Zeit nenne ich sodann beispielsweise den bekannten russischen Schachtheoretiker Major von Jaenisch, der gleichfalls dieser Ansicht zuneigte und für eine

oder, was gewiß wahrscheinlicher ist, die Partie — auch bei absolut korrektem Spiel des Gegners — stets unentschieden machen kann. Zwar ist verschiedentlich versucht worden, auch

---

spätere Zeit bereits eine Änderung in der Aufstellung der Figuren und in der damit zusammenhängenden „Rochade", eben zum Zweck der Beseitigung des jetzt seiner Ansicht nach in dem Anzug liegenden Übergewichts, voraussah (s. Jaenisch, „Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs", t. I, Petersburg 1862, Préface, p. V/VI). Gegen diese Ansicht Jaenischs wandte sich seiner Zeit allerdings sofort und mit aller Entschiedenheit eine andere Schachautorität, Max Lange (Schachzeitung XVIII, 1863, p. 97—102), und bisher hat diesem die weitere Entwicklung der Schachtheorie Recht gegeben. Denn die sogenannte „spanische Eröffnung", durch die Jaenisch zu der Ansicht geführt war, der Nachziehende sei von vornherein im Nachteil, hat gerade in neuester Zeit an Furchtbarkeit verloren, indem Emanuel Lasker in seinem Match mit Dr. Siegbert Tarrasch zeigte (1908), daß gegen den bisher für unabwehrbar geltenden Angriff eben dieser spanischen Partie die sogenannte Rio-de-Janeiro-Variante „eine ziemlich genügende, wenn auch nicht gerade schön zu nennende Verteidigung gibt", bei der Lasker „fast stets ein ziemlich befriedigendes Spiel" hatte. Die in Anführungszeichen gesetzten Worte sind geflissentlich der Kritik von Laskers Gegner entnommen; „man kann wieder Schach spielen", so fährt Dr. Tarrasch, der für diese Ausführungen freilich nicht die Zustimmung aller Schachkoryphäen gefunden hat, fort, „ohne wie bisher als Nachziehender bei dem Zug *e*2 — *e*4 sich dem sicheren Verderben in Gestalt der spanischen Eröffnung ausgesetzt zu sehen" (Die Woche, Nr. 41, 10. Okt. 1908, p. 1764). — Ein Spiel, das dem Anziehenden von vornherein ein bei richtigem Spiel entscheidendes Übergewicht gewährte, würde auch schwerlich durch die Jahrhunderte hindurch sich in so hervorragender Position bei allen Kulturvölkern des Morgen- und Abendlandes behauptet haben. — Wenn man nun gar die Statistik der Turnierresultate herangezogen hat (s. Schachzeitung 48, 1893, p. 1—4), so können diese schwerlich für einen in dem Spiel selbst liegenden und etwa durch den Anzug gegebenen Vorteil einen Anhalt bieten, da doch andere Momente erheblich mitspielen, wie dasjenige, daß der Anziehende den Charakter der Partie doch nicht unwesentlich bestimmt, wobei er naturgemäß in der Regel eine Eröffnung wählen wird, die ihm besonders liegt und die ihm somit relativ günstige Aussichten eröffnet. Diese Momente liegen jedoch außerhalb der Spieltheorie; sie fallen für den hier natürlich ideal anzunehmenden Meisterschaftsspieler, der alle Teile der Schachtheorie in gleicher Vollendung beherrscht, fort und interessieren uns daher in unserem Zusammenhange nicht.

die Mathematik der Schachtheorie dienstbar zu machen[1]), jedoch wird man diese Versuche als mißlungen ansehen dürfen, soweit es sich um die „Theorie" in dem soeben erläuterten Sinne handelt. Was soll man überhaupt unter einer „mathematischen" Behandlung der Schachtheorie verstehen? Eine solche müßte sich von der Schachtheorie im gewöhnlichen Sinne dadurch unterscheiden, daß sie alle bei einer gegebenen Stellung überhaupt nur möglichen Züge in den Bereich ihrer Erwägungen zöge; dies dürfte aber menschliches Können überhaupt übersteigen. Ist doch, um nur ein Beispiel anzuführen, die Zahl aller verschiedenen nach 2 Zügen (2 von jeder Seite) möglichen Positionen[2]) bereits größer als 70000, wenn auch die meisten dieser Kombinationen mehr oder minder fehlerhafte Züge aufweisen werden. Auch erscheint es für eine solche „mathematische" Theorie aussichtslos, durch Benutzung spezifisch mathematischer Hilfsmittel eine Abkürzung des analytischen Verfahrens zu erreichen. Denn wenn man etwa an die Stelle der einfachen und übersichtlichen Gangarten der Figuren, des Matt usw. komplizierte Formeln[3]) setzen und mit diesen gewisse Rechnungs-Algorithmen ausbilden wollte, wie dies in den soeben zitierten und anderen Arbeiten teilweise versucht ist, so würde in der Tat Arthur Schopenhauer Recht damit haben[4]), daß der Mathematiker einem Menschen

1) Rädell, Carl, „Über die mathem. Behandlung des Schachspiels", Schachzeitung (herausg. v. d. Berliner Schachgesellschaft), III, 1848, p. 101—120 (unvollendet); Wekerle, L., „Die Philosophie des Schach", Leipzig 1879, („ein kolossaler Blödsinn", wie der mehr als temperamentvolle Antonius v. d. Linde in seiner Schachbibliographie „Das erste Jartausend der Schachlitteratur", Berlin 1881, p. 107, hinzusetzt); W. Cluley, „The Philosophy of Chess", [1857 oder 1858] usw.

2) Cunningham („Chess Problem", British Assoc. Report 1890 (Leeds), p. 745 und Royal Engineer's Journal 1889) findet 71782, während C. Flye Sainte-Marie (Intermédiaire des mathém., t. X, 1903, p. 305—308) diese Zahl zu 71852 bestimmt, nachdem er sie zuvor (ibidem t. II, 1895, p. 115) zu 71870 angegeben hatte.

3) Man vergleiche hier z. B. die Gleichung des Springers, die uns bei Gelegenheit des Rösselsprungproblems (Kap. XI, § 8) begegnen wird.

4) Auch für gewisse in Kap. IX, Abschnitt C des „Anhang", zitierte mathematische Untersuchungen über die Schachfiguren gilt dies.

gliche, der sich seine gesunden Beine abschneide, um sich statt deren hölzerne ansetzen zu lassen — so unberechtigt dies Wort des wenig mathematikverständigen Philosophen auch sonst ist. Dem praktischen Schachspieler würde eine vollständig erschöpfende Berücksichtigung aller nur möglichen Kombinationen jedenfalls einen unverhältnismäßigen Aufwand an Zeit und Kraft bedeuten[1]), da sein taktischer Blick ihn eine große Zahl offenbar fehlerhafter oder wertloser Züge von vornherein ignorieren und seine ganze Kraft denjenigen zuwenden läßt, die im Bereich des Möglichen liegen und deren Konsequenzen daher so weit wie möglich zu verfolgen sind: so gleicht er einem Wanderer, der auf seiner Wanderschaft eine große Stadt passiert und sich ein Bild von dieser verschafft, indem er der Flucht der Hauptstraßen folgt, Lage und Aussehen der hervorragendsten und merkwürdigsten Gebäude sich genau einprägt und dann seine Wanderschaft fortsetzt, während ein anderer sich vornimmt, die Stadt nicht früher zu verlassen, als bis er jede, auch die offenbar unbedeutendste Straße passiert und jedes einzelne Haus betrachtet hat, hierbei allerdings vielleicht einmal eine Merkwürdigkeit entdeckt, die dem ersteren entgangen, andererseits aber von Zeit zu Zeit sich in Sackgassen festrennt und einen unverhältnismäßig viel längeren Aufenthalt nehmen muß oder überhaupt ganz hängen bleibt. Es ist daher sehr richtig, wenn der bekannte, schon zitierte Schachtheoretiker Max Lange sagt, daß solche mathematischen Berechnungen, wie die von jenen Autoren gegebenen, „das Vordringen zu dem letzten Grunde der Schachweisheit eher hemmen als fördern".[2]) Zustimmen können wir jedoch Lange nicht mehr, wenn er, durch ein offenbar nicht richtig verstandenes Wort Leibniz'

1) In diesem Sinne ungefähr hat sich über das Dame- und Schachspiel, wie ich beispielsweise anführe, bereits Mydorge („Examen du livre des récréations mathématiques", Ausg. 1639, p. 187), vielleicht aber auch andere vor ihm, ausgesprochen.

2) Max Lange, „Das Schach vom akademischen Standpunkt", Berliner Schachzeitung II, 1897/98, p. 3.

veranlaßt, meint[1]), die heutigen Mittel der Mathematik seien vielleicht nur noch nicht imstande, solche Fragen zu lösen[2]), und man müsse vielleicht „im Schachspiel einen höheren teleologischen Zweck erblicken, nämlich daß die Vorsehung unser Spiel nur deshalb so beliebt gemacht habe bei den Menschen, damit es immer weiter gefördert einmal in Zukunft einer der strengsten Wissenschaften als Quelle neuer Forschung und Ausbildung diene."

Die Bedeutung des Schach als Spiel beruht sogar gerade darauf, daß es einer mathematischen Behandlung nicht zugänglich ist; seine Feinheit besteht zu einem großen Teil gerade darin, daß eben, wie schon gesagt, durch die unermeßlich große Zahl von Kombinationen einer abschließenden Behandlung vorgebeugt ist. Es darf bei dieser Gelegenheit freilich nicht unerwähnt bleiben, daß sich, obwohl doch von einer mathematischen Schachtheorie gar keine Rede sein kann, aus Schachspielerkreisen Stimmen dahin vernehmen lassen, daß man von den Partien der modernen Schachmeister im Gegensatz zu denen eines Anderssen und Morphy „keinen rechten Genuß habe infolge des niederdrückenden Gefühls, das diese immer unveränderliche mathematische Genauigkeit hervorruft."[3]) „Steinitz und Lasker" — so heißt es dort — „haben uns gelehrt, die Schönheit der Partien dem Siege und der Korrektheit derselben hintanzusetzen, sie haben uns gelehrt, die Kraft der Phantasie im Interesse der Korrekt-

1) Berliner Schachzeitung, l. c. p. 5, s. a. v. demselben: „Lehrbuch des Schachspiels", Halle 1856, p. 94.

2) In der schier unermeßlichen Mannigfaltigkeit der beim Schach auftretenden Positionen erblickt Max Lange jedenfalls ein Bedenken gegen eine mathematische Behandlung nicht, vielmehr lehrt nach ihm „schon ein einziger Blick auf die Organisation des Spiels, daß es gewiß einer spätern Zeit gelingen wird, sämtliche Schachprobleme auf mathematischem Wege in einfacher Weise leicht und sicher zu lösen" („Lehrbuch", p. 94/95). Einen mathematischen Leser wird freilich seine Beweisführung nicht gerade überzeugen.

3) „Einige Worte über Lasker und die Richtung der Jetztzeit in der Schachspielkunst", Berliner Schachz. II, 1897/98, p. 99—101.

heit in Fesseln zu legen und dabei zu vergessen, daß die Phantasie und die aus derselben sich ergebende Schönheit der Kombination die Seele des Schachspiels sind und dessen Vorzüge begründen", und selbst von Steinitz bis zu seinem Nachfolger in der Weltmeisterschaft, dem bisherigen Champion of the world und Mathematiker Emanuel Lasker, hat die hier gezeichnete Entwicklung weitere Fortschritte gemacht: „Steinitz' Spiel", sagt z. B. Adolph Albin, „wenn die Partie noch so trocken ist, hat immer etwas unterhaltendes und wissenswertes Beiwerk, dagegen das des Lasker: die mathematische Akkuratesse."[1]) Man beklagt die verhältnismäßig große Zahl der Remispartien auf den Turnieren und erblickt in ihnen eine Folge der beständigen Fortschritte der Spieltheorie.[2]) Arnous de Rivière († 1905), der bekannte französische Schachtheoretiker, meint, daß das moderne Schachspiel durch die hochaufgespeicherten Analysen, deren Zahl mit allen möglichen Varianten und Untervarianten in die vielen Tausende geht, fast zur Mnemotechnik geworden sei.[3]) Man hat sich sogar zu der Forderung verstiegen, dieses ganze „eiffelturmartige" Gebäude mit einem Schlage umzustürzen dadurch, daß man die Figurenaufstellung ändere, etwa Springer mit Läufer vertausche und entsprechend je nach Bedarf später weitere Änderungen vornehme, ja bei Turnieren vorher überhaupt nicht bekannt gebe, wie die Figuren aufgestellt werden sollten[4]), — oder aber dadurch, daß man die Spieler ihre Figuren einzeln abwechselnd und willkürlich auf dem Brett aufstellen lasse.[5]) Vorerst haben

1) Adolph Albin, „Schach-Aphorismen", 1899, p. 18.

2) „Je weiter die Theorie fortschreitet, je mehr die Einsicht in die Theorie des Spieles sich vertieft, desto seltener werden die Fehler, desto seltener die Siege und desto häufiger die Remispartien", sagt Schachmeister Georg Marco in den „Hamburger Nachrichten" (ich zitiere nach der Deutschen Schachzeitung, 59. Jahrg., 1904, p. 317).

3) Zitiert nach A. Albin, „Moderne Schach-Turniere", Deutsches Wochenschach VII, 1891, p. 239.

4) „Reformen im Schachspiel", Berliner Schachzeitung, I, 1896/97, p. 99—102.

5) Z. B. siehe C. A. Otto Voigt, „Das allgemeine Schachspiel.

derartige Radikalvorschläge aber nicht nur keine Berechtigung, sondern auch wohl keine Aussicht auf Verwirklichung. Diejenigen, denen das Schach nur Spiel, nur Zerstreuung ist, werden es in der alten Weise weiter betreiben und sich um die Theorie, mag diese die Höhe des „Eiffelturms" oder des Mont Blanc erreicht haben, nicht sonderlich bekümmern. Daneben wird von den Händen Berufener das Gebäude der Schachtheorie in Breite und Höhe weiter gefördert werden. Solange sich die Anschauungen über die wichtigsten Eröffnungen noch von Grund aus ändern können resp. völlig auseindergehen (s. oben S. 165, Anmerkung), ist man von einem Abschluß der Spieltheorie noch weit entfernt. Von einer eigentlich mathematischen Erledigung des Schachproblems vollends kann, mag auch die neue Schachschule noch so oft als eine „mathematische" bezeichnet werden, wie gesagt, gar keine Rede sein und wird auch schwerlich jemals die Rede sein können. — Wollen wir Beispiele von Brettspielen mit abschließenden, also gewissermaßen „mathematischen" Theorien haben, so werden wir die Verhältnisse ungleich einfacher gestalten müssen als sie beim Schach sind. Wir werden in den folgenden Paragraphen ein Paar solcher besonders einfacher Spiele besprechen. Im Schachspiel gibt es bisher nur gewisse Untergebiete mit solchen unzweifelhaften, abschließenden Resultaten und das sind einerseits die sogenannten „Endspiele" mit den relativ einfachsten Konfigurationen, die überhaupt im Schachspiel vorkommen, und andererseits die Schachprobleme.

Auch die **mathematischen Untersuchungen über den Wert der Figuren** scheinen uns von ziemlich fragwürdiger Bedeutung zu sein.[1]) Der Wert einer Figur ist zweifellos kein absoluter,

Ein Vorschlag zu einer Erweiterung des Schachspiels"; ich zitiere nach der kritischen Besprechung dieser Schrift in der Deutschen Schachzeitung 42, 1887, p. 129—136 von Max Lange, der übrigens zugleich auf das beträchtliche Alter dieses Reformvorschlags hinweist.

1) Aus der umfangreichen Literatur nennen wir die im literar. Index aufgeführten Publikationen von Pratt (1825), Jaenisch (Palamède-Artikel von 1845 und vor allem „Traité", t. III, 1863), Tomlinson (1845), H. M. Taylor (1876), D. Biddle (1883), Sanjána (1901), P. Böhmer

sondern hängt von ihrer eigenen Stellung und der der übrigen Figuren, von der Individualität des Spielers usw. ab, und diese Momente entziehen sich entweder ganz einer rechnerischen Behandlung, oder aber eine solche wird höchstens möglich auf grund gewisser hypothetischer Annahmen, die ihrerseits wieder doch nur der Ausfluß des im praktischen Spiel herangereiften Urteils sein können. Wozu dann aber, wenn dies subjektive Urteil doch als das letzte Forum erscheint, dasselbe durch eine Ziffer verdrängen wollen, wo diese ziffernmäßige Bewertung doch schwerlich so fein durchgebildet werden kann, um allen in Betracht kommenden Faktoren gerecht zu werden?

In diesem Zusammenhange mag noch ein Problem erwähnt werden, zu dem zwar nicht die Schachtheorie selbst, wohl aber der Wettbewerb der Schachspieler untereinander Veranlassung gegeben hat, das freilich auch bei Turnieren anderer Spiel- oder Sportarten[1]) sich in gleicher Weise erheben kann, nämlich das folgende: wie sind die Leistungen der verschiedenen Teilnehmer eines Turniers am gerechtesten zu bewerten? Mit Recht ist nämlich geltend gemacht, daß die bloße Zahl der gewonnenen und unentschiedenen Partien kein gerechter Maßstab der Gesamtleistung sei, sondern daß bei allen diesen Partien deren Qualitäten zu berücksichtigen seien, die wieder nach den auf grund des Turnierausfalls zu ermittelnden Spielstärken der jeweiligen Gegner zu berechnen sind.

Das Problem, dessen mathematischen Ansatz E. Landau[2]) angegeben hat, führt auf schwierige algebraische Fragen, nämlich eine

(1904); vgl. auch die auch in Kap. IX, Anhang, S. 276, Anm. 1 zitierte Arbeit von Lemoine (1880).

1) Vgl. z. B die im liter. Index aufgeführte Arbeit von Désiré André von 1898/99 und das „Supplément" dazu von 1899/1900.

2) E. Landau, „Zur relativen Wertbemessung der Turnierresultate", Deutsches Wochenschach 11, 1895, p. 366—369. — Die zahlreichen sonstigen Ausführungen zu dieser Frage, insbesondere in Schachblättern deutscher und englischer Zunge (Deutsche Schachzeitung, Wiener Schachzeitung, Wochenschach, British Chess Magazine, International Chess Magazine) bewegen sich mehr oder weniger in einem circulus vitiosus und

Gleichung n^{ten} Grades, die sich von der sogenannten Säkulargleichung dadurch unterscheidet, daß die Determinante nicht, wie dort, symmetrisch, auch nicht halbsymmetrisch ist.

Andere Fragen mathematischer Natur, die mit dem Schachspiel in einem gewissen Zusammenhange stehen, werden uns in den folgenden Abschnitten des Buches (Kap. IX, X, XI, sowie auch in Bd. II: Kap. XIV, Abschnitt I, § 2), noch näher beschäftigen. Das Schachspiel selbst hat freilich mit diesen Fragen nichts zu tun. — Hier wollen wir noch, da wir in diesem, wie in späteren Kapiteln einer einfachen Notation für die Schachbrettfelder benötigen, dem hiermit etwa nicht vertrauten Leser bemerken, daß man in der deutschen Schachwelt die horizontalen Reihen durch Ziffern, die vertikalen durch Buchstaben, wie in Fig. 1 angegeben, unterscheidet; das Feld $d7$ z. B. ist hiernach das der Vertikalreihe d und der Horizontalreihe 7 angehörende.

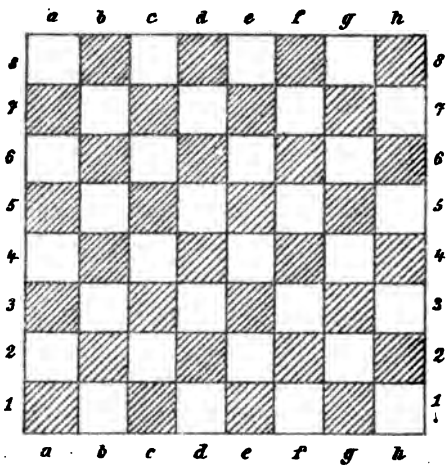


Fig. 1.

§ 2. Die einfachste Form des Mühlespiels.

Das Spiel wird von 2 Personen auf einem Brett von der Form umstehender Figur 2 mit je 3 Steinen gespielt. Die eine Person, *W*, hat weiße, die andere, *S*, schwarze Steine. *W* setzt zunächst einen

führen oft zu ganz widersinnigen Resultaten, wie z. B. dem, daß Turnierteilnehmer *A* den ersten Preis erhält, nicht weil er aus den Turnierresultaten als der stärkste Teilnehmer ermittelt ist, sondern weil *B*, dem er eine Partie abgewann, eigentlich dies ist (s. die Kritik bei Landau, l. c., sowie in den im liter. Index, Jahr 1901, aufgeführten Artikeln des Verfassers aus der Wiener Schachzeitung).

seiner Steine auf einen der 9 durch Zahlen bezeichneten Punkte des Brettes, dann S gleichfalls, usw. abwechselnd, bis alle Steine gesetzt sind. Derjenige hat gewonnen, dessen 3 Steine zuerst in derselben horizontalen, vertikalen oder schrägen Geraden stehen, Stellungen, die den Namen „Mühle“ führen. Wird dies beim Setzen noch nicht erreicht, so ziehen die beiden Spieler abwechselnd je einen ihrer Steine längs einer der Linien des Brettes auf ein freies Nachbarfeld, um hierdurch eine Mühle zu erlangen.

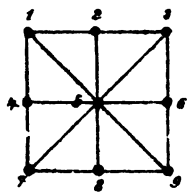


Fig 2.

Bei richtigem Spiel gewinnt W stets, wie sich folgendermaßen ergibt:[1])

W setzt zunächst auf das innere Feld 5, da dieses wegen seiner 8 Ausgänge gegenüber den 3 der anderen Felder offenbar bevorzugt ist. S setzt nun entweder auf ein Mittel- oder ein Eckfeld; welches in jeder der beiden Kategorien wir wählen, ist offenbar gleichgültig, und wir haben daher nur folgende 2 Fälle zu unterscheiden:

1) S setzt auf 1. Setzt W jetzt auf 8, so muß S auf 2 setzen, um den sofortigen Sieg von W zu verhindern, und W muß nun auf 3 setzen, S aber auf 7. In den beiden nächsten Zügen zieht W von 8 nach 9 und von 5 nach 6 und siegt.

2) S setzt auf ein Mittelfeld, etwa 2. Wir geben die Lösung hierfür kurz in leicht verständlicher schematischer Form, wobei ein Akzent an einer Zahl bedeuten soll, daß eine Notwendigkeit für die betreffende Wahl vorliegt, und das in der Schachliteratur übliche Zeichen $\sim$ ausdrückt, daß der betreffende Zug beliebig geschehen kann.

W.	S.
5	2
7	3′
1′	4′
7—8	$\sim$
8—9	

und siegt.

1) Siehe Lucas, „Récréations“, t. II, p. 79.

So sehen wir, daß *W stets siegt.*

Wird die Spielregel jedoch dahin modifiziert, daß **der erste Stein nicht auf das innere Feld gesetzt werden darf**, so gestaltet sich das Resultat anders. Nach dem Obigen wird man zu der Vermutung gedrängt, daß es für *S* am günstigsten sein wird, seinen ersten Stein auf 5 zu setzen, und wir wollen daher diesen Zug vorläufig als feststehend ansehen. Je nachdem nun *W* seine beiden ersten Steine setzt, ergeben sich folgende Fälle:

1) *W* setzt auf 2 gegenüberliegende Mittelfelder (2 und 8).

W.	*S.*
2	5
8	7
3′	1
∼	5—4 und siegt.

2) *W* setzt auf 2 benachbarte Mittelfelder:

W.	*S.*
2	5
4	9
1′	3
∼	5—6 und siegt.

3) *W* setzt auf ein Mittel- und ein benachbartes Eckfeld:

W.	*S.*
1	5
2	3′
7′	9
∼	5—6 und siegt.

4) *W* setzt auf ein Mittel- und ein nichtbenachbartes Eckfeld:

W.	*S.*
6	5
1	7
3′	9
∼	5—8 und siegt.

5) *W* setzt auf zwei gegenüberliegende Eckfelder:

W.	*S.*
1	5
9	2
8′	7
~	2—3 und siegt.

6) *W* setzt auf 2 benachbarte Eckfelder:

W.	*S.*
1	5
3	2′
8′.	

Bisher ist die Stellung symmetrisch, und wir brauchen daher von den 4 noch leeren Feldern, auf die *S* seinen dritten Stein setzen kann, nur 2 zu berücksichtigen, ein Mittel- und ein Eckfeld:

Setzt *S* auf 4, so zieht *W*: 8—7, und *S* muß das Mittelfeld verlassen, worauf *W* mit: 1—5 siegt.

S darf also seinen dritten Stein nicht auf 4, sondern muß ihn auf 7 setzen.

W muß jetzt 1—4 ziehen, da sonst *S* mit dem nächsten Zuge siegen würde.

S darf jetzt nicht 2—1 ziehen, da dann *W*: 3—2 antworten, *S* damit zum Verlassen des Feldes 5 zwingen und siegen würde. Daher zieht *S*: 5—6 oder 5—9.

Man erkennt leicht, daß bei richtigem Spiel beiderseits weder *W* noch *S* zum Siege gelangen kann.

Wenn also die Besetzung des inneren Feldes durch den ersten Stein verboten ist, so siegt *W* bei korrektem Spiel von *S* niemals mehr, hat es aber noch in der Hand, die Partie unentschieden zu machen, indem er mit seinen beiden ersten Steinen 2 benachbarte Eckfelder[1]) besetzt. Allerdings basiert

1) Die Bevorzugung der Eckfelder vor den mittleren Randfeldern hat offenbar darin ihren Grund, daß ein Eckfeld zwar auch nur dieselbe

unsere Analyse auf der Annahme, daß *S* seinen ersten Stein auf 5 setzt, und es wäre noch zu untersuchen, ob es nicht doch für *S* eine noch günstigere Platzwahl für den ersten Stein gibt, durch die er den Sieg erzwingen könnte. Eine genaue Analyse würde recht langwierig werden und wenig Interesse bieten. Wir wollen sie daher dem Leser ersparen und nur das Resultat angeben: Unter den Anfängen, die *S* außer Feld 5 an sich wählen könnte, sind zunächst zwei, bei denen er mit Sicherheit verliert, die also fehlerhaft sind, nämlich:

1)	*W.*	*S.*
	1	6
	5	9′
	3′	2′
	1—4	∼
	4—7	
	und siegt.	

2)	*W.*	*S.*
	2	7
	5	8′
	9′	1′
	2—3	∼
	5—6	
	und siegt.	

In den übrigen Fällen kann *S*, auch ohne seinen ersten Stein auf 5 zu setzen, eine Niederlage bei richtigem weiterem Spiel zwar vermeiden, jedoch nur ein Remis, nicht den Sieg erzwingen.

Bei beiderseitigem richtigem Spiel wird also eine Partie unseres Mühlespiels — mit dem Verbot der Besetzung des Mittelfeldes durch den ersten Stein — stets unentschieden bleiben.[1])

Anzahl von Ausgängen wie ein mittleres Randfeld besitzt, jedoch an 3 der an sich möglichen 8 Mühlen beteiligt ist, während dies für ein mittleres Randfeld deren nur 2 sind.

1) Derselbe Erfolg — beständiges Remis bei beiderseitigem richtigem Spiel — tritt nach Lucas, l. c. p. 84 ein bei einer vorwiegend in

§ 3. Schaf und Wolf.

Das Spiel wird in Deutschland auf einem gewöhnlichen Schachbrett gespielt mit 4 Steinen einer Farbe, etwa schwarz, den „Schafen“[1]), die auf den schwarzen Feldern der Reihe 1 (siehe Figur 1, S. 172) aufgestellt werden, und einem Stein der anderen Farbe (weiß), dem „Wolfe“, der sich auf irgendein schwarzes Feld stellt. Die Steine bewegen sich ausschließlich auf schwarzen Feldern, von einem Feld bis zu einem darangrenzenden, und zwar die Schafe nur nach vorn, während der Wolf vor- und rückwärts ziehen darf. Es kommt nun bei dem Spiel darauf an, daß die Schafe den Wolf fortgesetzt zurücktreiben und ihn schließlich so einschließen, daß er nicht mehr ziehen kann, während der Wolf die Partie gewonnen hat, sobald er die Reihe der Schafe durchbricht. Wir werden die Partie der Schafe oder schwarzen Steine kurz mit *S*, die des Wolfes oder weißen Steins mit *W* bezeichnen.[2]) An sich ist es offenbar gleichgültig, wer anzieht, da *W* sich ja sein Feld beliebig wählen darf, doch ist es, wenn auch gegen den bei Brettspielen sonst üblichen Brauch, für die Darstellung bequemer, wenn wir *S* stets den Anzug geben. Wir behaupten nun, daß *S bei richtigem Spiel stets siegen muß* und der

---

Polen gepflegten Abart unseres Spiels, die sich von dem zu Eingang dieses Paragraphen beschriebenen Spiel nur dadurch unterscheidet, daß die Spieler ihre Züge tun, indem sie einen ihrer 3 Steine auf ein beliebiges anderes leeres Feld setzen, mag dieses mit dem ersten durch eine der Linien der Figur verbunden sein oder nicht.

1) In Ländern, in denen, wie z. B. in Frankreich, sich das 100-feldrige Damebrett eingebürgert hat, spielt man unser Spiel auf diesem und dann natürlich mit 5 Steinen gleicher Farbe, vgl. Lucas, „Récréations“, t. II, p. 92—98, dessen Entwicklungen für uns hier vorbildlich waren. Lucas nennt das Spiel „Cinq contre un“ oder „Entre chiens et loup“ oder „Bataille des renards“; in der im liter. Index aufgeführten Schrift von Charpentier (l. c. p. 25) heißt es auch „Le fou contre les gamins“.

2) Diese für das Folgende bequeme Abkürzung (*S* für Schwarz und Schafe, *W* für Weiß und Wolf) veranlaßte uns zu der obigen Wahl der Farben, obwohl diese gewöhnlich umgekehrt getroffen wird.

Beweis hierfür ist offenbar erbracht, wenn wir zeigen, daß alle Steine von S für jede Stellung von W in die nächste oder übernächste Reihe vorrücken können, ohne daß W ihre Reihe durchbricht. Denn, wenn S bei beliebiger Stellung von W von der Reihe 1 in die Reihe 2 mit allen 4 Steinen vorrücken kann, so muß es ihm auch möglich sein, von der zweiten Reihe aus die dritte Reihe ganz zu besetzen. Allerdings besteht zwischen der ersten und zweiten Reihe insofern eine Lagenverschiedenheit, als in der ersten Reihe das äußerste Feld rechts ein weißes, in der zweiten dagegen ein schwarzes ist usw. Wir brauchen uns aber die Position mit S in der zweiten Reihe nur an dem linken oder rechten Seitenrand des Bretts gespiegelt zu denken und erhalten dann ein Spiegelbild, das sein genaues Analogon unter den Stellungen mit S in der ersten Reihe hat.

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

I. W befindet sich auf einem Felde der vierten oder einer höheren Reihe, etwa auf $d4$; dann zieht S: $c1 - d2$ und, wenn W nach $c3$ geht, erfolgt: $a1 - b2$; geht W nach $e3$, so zieht S: $e1 - f2$. Geht schließlich W weiter zurück oder befand er sich von vornherein in der fünften oder einer höheren Reihe, so rückt S mühelos mit allen 4 Steinen in die zweite Reihe vor.

Es verdienen hiernach offenbar nur noch die Fälle Beachtung, in denen W sich auf einem Felde der zweiten oder der dritten Reihe befindet, und diese wollen wir nunmehr einzeln besprechen:

II. W auf $g3$:

S: $c1 - d2$; 1) W: $g3 - h2$.

S: $e1 - f2$; W: $h2 - g3$.

S: $g1 - h2$, und nachher rückt der vierte Stein in die Reihe 2.

— 2) W: $g3 - f2$.

S: $a1 - b2$; W muß zurück nach $e3$ oder $g3$.

S: *e*1 — *f*2, und nachher zieht *S*: *g*1 — *h*2, weil *W* die Besetzung von Feld *h*2 mit Einschließung büßen würde.

III. *W* auf *e*3:

S: *c*1 — *d*2; *W*: *e*3 — *f*2; Fortsetzung wie in II 2).

IV. *W* auf *c*3:

S: *g*1 — *f*2; 1) *W*: *c*3 — *b*2.

S: *e*1 — *d*2; *W*: *b*2 — *a*3 oder *c*3.

S: *a*1 — *b*2; *W* nach *b*4 oder *d*4:

Geht *W* nach *b*4, so zieht *S*: *d*2 — *c*3 und besetzt ungehindert die Reihe 3 durch: *c*1 — *d*2 — *e*3; *f*2 — *g*3; *b*2 — *a*3. Geht *W* aber nach *d*4, so zieht *S*: *d*2 — *e*3; *c*1 — *d*2 — *c*3; *f*2 — *g*3; *b*2 — *a*3 und hat die Reihe 3 inne.

— 2) *W*: *c*3 — *d*2.

S: *f*2 — *e*3; *W*: *d*2 — *c*3.

S: *a*1 — *b*2; *W*: *c*3 — *b*4 oder *d*4 (auf *d*2 würde *W* eingeschlossen werden).

S: *c*1 — *d*2; *W* nach *c*3 oder *a*3.

S zieht: *e*1 — *f*2; *d*2 — *c*3; *f*2 — *g*3; *b*2 — *a*3.

V. *W* auf *a*3:

S: *a*1 — *b*2 und rückt ungehindert in die Reihe 2 ein.

VI. *W* befindet sich auf *h*2:

S: *e*1 — *f*2; *W*: *h*2 — *g*3.

S: *c*1 — *d*2; *W* kann nach *h*2 nicht gehen, da dort Einschließung droht, und kann daher nicht mehr verhindern, daß *S* in den nächsten beiden Zügen die ganze Reihe 2 besetzt.

VII. *W* befindet sich auf *f*2:

S: *c*1 — *d*2.

Ob *W* nun *f*2 — *g*3 oder *f*2 — *e*3 zieht, *S* zieht *e*1 — *f*2 und besetzt ohne Schwierigkeit die Reihe 2, da auf *h*2 für *W* wieder Einschließung droht.

VIII. *W* auf *d*2:

S: *a*1 — *b*2. Zieht 1) *W*: *d*2 — *c*3, so antwortet *S*: *c*1 — *d*2 und besetzt ohne Schwierigkeit die Reihe 2.

Zieht 2) *W*: *d*2 — *e*3, so folgt auch *S*: *c*1 — *d*2.

Geht *W* nun zurück, rückt *S* völlig in die Reihe 2 ein.

Zieht *W* aber: *e*3 — *f*2, so *S*: *b*2 — *c*3.

Zieht nun *α*) *W*: *f*2 — *g*3, so *S*: *e*1 — *f*2. Nach *h*2 kann *W* wegen der drohenden Einschließung nicht gehen. Geht *W* jetzt nach *f*4, so folgt *S*: *g*1 — *h*2, und wir haben dieselbe Position, wie in Fall IV nach dem ersten Zuge von *S*. Geht *W* aber von *g*3 nach *h*4, so zieht *S*: *f*2 — *g*3 und dann: *g*1 — *f*2 — *e*3; *c*3 — *b*4; *d*2 — *c*3. In diesen 5 Zügen kann nun *W* entweder bis in die Reihe 7 gegangen sein, in welchem Falle *S* anstandslos die Reihe 4 besetzt, oder aber *W* ist auf ein Feld der Reihe 5, nämlich *c*5, *e*5 oder *g*5, gegangen: Befindet sich *W* auf *g*5, so zieht *S* jetzt: *e*3 — *f*4 und, wenn *W* auf *c*5 steht: *c*3 — *d*4 und rückt in beiden Fällen darauf ganz in die Reihe 4 ein. Befindet sich aber *W* auf *e*5, so haben wir offenbar wieder dieselbe Position wie zu Anfang dieses Falles nach den Zügen: *S*: *a*1 — *b*2; *W*: *d*2 — *e*3.

Zieht *β*) *W*: *f*2 — *e*3, so antwortet *S*: *g*1 — *f*2. Je nachdem nun *W* nach *d*4 oder *f*4 geht, ergeben sich folgende 2 Fortsetzungen:

β$_1$) — *W*: *e*3 — *f*4.

S: *f*2 — *g*3; *W* am besten: *f*4 — *e*3.

S: *e*1 — *f*2; *W* am besten: *e*3 — *d*4.

S: *f*2 — *e*3; *W*: *d*4 — *c*5 oder *e*5.

S: *c*3 — *b*4; *W*: am besten nach *d*4.

S: *d*2 — *c*3; *W*: *d*4 — *c*5 oder *e*5.

S: *c*3 — *d*4 und besetzt, wenn *W* auf *c*5 steht, ungehindert die ganze Reihe 4; steht *W* aber auf *e*5, so haben wir wieder die Position wie zu Anfang unseres Falles nach dem zweiten Zuge von *S*.

β$_2$) — *W*: *e*3 — *d*4.

S: *f*2 — *e*3, und ob nun *W* nach *c*5 oder *e*5 geht, *S* kommt zu derselben Stellung wie unter *α*), indem der Stein *e*1 nach *g*3, *c*3 nach *b*4, *d*2 nach *c*3 kommt. Nach diesen 4 Zügen befindet sich *W* entweder in der Reihe 7 oder auf einem Felde der Reihe 5; diese Positionen sind uns aber schon unter *α*) vorgekommen mit Ausnahme des sehr leicht zu erledigenden Falles, daß *W* auf *a*5 steht.

IX. *W* auf *b*2:

S: *e*1 — *d*2; 1) *W*: *b*2 — *a*3; *S*: *a*1 — *b*2.
W: *a*3 — *b*4; *S*: *d*2 — *c*3.

S kann jetzt ungehindert den Stein *c*1 auf das Feld *e*3 und *g*1 nach *g*3 bringen, schließlich *b*1 nach *a*3, welch letzteres Feld *W* wegen der dort drohenden Einschließung nicht besetzen darf; damit hat *S* die Reihe 3 in Besitz.

— 2) *W*: *b*2 — *c*3; *S*: *a*1 — *b*2.
W: *c*3 — *b*4; Fortsetzung wie in 1)
oder *W*: *c*3 — *d*4; *S*: *d*2 — *e*3, und *S* besetzt ohne weitere Schwierigkeit die Reihe 3.

Kapitel VIII.

Das Nonnen- oder Einsiedler-(Solitär-)spiel.

Ce jeu n'a pas grand attrait quand on en ignore la marche, et n'en a point quand on la sait.

LE CHEVALIER DE JAUCOURT.
„Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers", t. XV, 1765, p. 325 (Artikel „Solitaire")

Der König [Friedrich Wilhelm IV.], der sonst Abends beim Thee zeichnete, und dabei nur abgerissen und zerstreut an dem ohnehin lahmen Gespräch Antheil nahm, pflegt jetzt das Solitairspiel zu üben, wobei noch weniger für die Gäste herauskommt. Es sei über alle Beschreibung dürftig und langweilig in dem Hofkreise beim Könige, heißt es, man könne es als eine Strafe ansehen, dort immer sein zu müssen.

VARNHAGEN VON ENSE, 3. April 1844.
Siehe „Tagebücher", Bd. II, 1861, p. 280.

Enfin il seroit à souhaiter qu'on eut un cours entier des jeux, traités mathématiquement.

LEIBNIZ an Rémond de Montmort.
Hannover, 17. Januar 1716.
Siehe „Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz", herausg. von C. J. Gerhardt, Bd. III, Berlin 1887, p. 669.

§ 1. Spielregel. Notation. Problemstellung.

Über den Ursprung des Spiels ist Sicheres nicht bekannt. Einer weitverbreiteten Erzählung zufolge ist es in Amerika von einem Franzosen[1]) erfunden worden, der sah, wie Indianer von einer Jagd zurückkehrten und ihre Pfeile in Löcher

1) Es darf nicht verschwiegen werden, daß die Quelle dieser recht gemacht erscheinenden Erzählung anscheinend auch ein französisches Werk ist; jedenfalls finde ich sie zuerst in der „Encyclopédie méthodique. Dictionnaire des jeux mathématiques . . . suite du dictionnaire des jeux", Paris 1799, p. 200. Anderseits darf für den behaupteten französischen Ursprung des Spiels wieder angeführt werden, daß der französische Name — Solitärspiel — schon sehr früh und vielleicht früher als andere gebräuchlich war (vgl. Anm. 1, S. 184).

steckten, die hierfür bestimmt und in besonderer Weise angeordnet waren. Nach einer anderen Darstellung soll der Name „Einsiedlerspiel" nicht sowohl von dem Spielenden, der bei dem Spiel zum Einsiedler wird oder sich die Langeweile eines Einsiedlerlebens damit vertreiben mag, herrühren als vielmehr daher, daß es die Erfindung eines Einsiedlers war, und auf einem in neuerer Zeit in höchsten künstlerischen Formen hergestellten Spielexemplar dürfen wir den Einsiedler, den „Erfinder", sogar leibhaftig bewundern.[1]) Als Zeit der Erfindung wird angegeben[2]): Anfang des 18. Jahrhunderts. Sicher ist diese Zeit nicht zu früh angesetzt; denn in der Literatur begegnen wir dem Spiel bereits in einer noch weiter zu erwähnenden Leibnizschen Abhandlung[3]), die in dem ersten von der Berliner Akademie veranstalteten Memoirenbande steht, dessen Ausgabe im Jahre 1710 erfolgte. Wohl zum letzten Male erfunden wurde das Spiel vor einigen dreißig Jahren, wo es ein — inzwischen gelöschtes — deutsches Reichspatent[4]), das nachzusuchen Leibniz seinerzeit offenbar nur ver-

1) Es handelt sich um das Einsiedlerspiel in dem Spielschrein, der dem deutschen Kronprinzen, späteren Kaiser Friedrich, und seiner Gemahlin zu deren Silberhochzeit (25. Jan. 1883) von dem Verein für deutsches Kunstgewerbe auf Anregung von Franz Reuleaux dargebracht wurde. In dem hierüber besonders herausgegebenen Tafelwerke (s. liter. Index: Nr. 451) sind die Teile des Einsiedlerspiels auf Taf. 28 abgebildet: „das [übrigens sehr schöne] Gemälde auf dem Kasten stellt den Einsiedler vor, welcher der Sage nach das Spiel erfand"; vgl. auch einen Artikel von Franz Reuleaux (Nr. 451 des liter. Index) in Westermanns Monatsheften, 61. Bd., p. 194. — Dem Empfänger des kunstvollen Spiels mag dieses übrigens schon in seiner Jugend bekannt geworden sein (s. das Zitat aus Varnhagen oben).

2) Siehe die in der Anmerkung auf voriger Seite zitierte „Encyclopédie méthodique", l. c. p. 324.

3) Leibniz, „Annotatio de quibusdam ludis" etc., Miscellanea Berolinensia 1710, p. 24. Außerdem in dem Briefe von 1716, dem das am Kopfe dieses Kapitels stehende Zitat entstammt. — Übrigens soll auch Lazare Nicolas Marguerite Carnot sich eingehender mit dem Spiel beschäftigt haben, s. Bulletin des sciences mathém., astronom., physiques et chimiques (Férussac), t. I, Paris 1824, p. 137.

4) Patentklasse 77, Nr. 42919 (Patent vom 25. Sept. 1887).

absäumt hatte, erhielt. — Außer den in der Überschrift unseres Kapitels bereits angegebenen Namen[1]) führt das Spiel noch die weiteren: „Grillenspiel“[2]), „Kreuzspiel“, „Kapuziner-Spiel“[3]).

Daß es eine „Strafe“ sei, jemandem und wäre er selbst ein König, beim Solitärspiel zusehen zu müssen, haben wir bereits oben von Varnhagen gehört. Spielen wir es also selbst! Unter den verschiedenen Formen, in denen das Spiel auftritt, überwiegt in Deutschland die eines Kastens, dessen Deckel 33 Löcher aufweist, durch die Holzpflöcke hindurchgesteckt werden können, wobei mindestens ein Loch stets leer gelassen wird. Die Löcher sind symmetrisch und zwar so, wie Figur 1 dies zeigt, angeordnet.

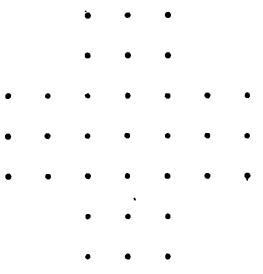


Fig. 1.

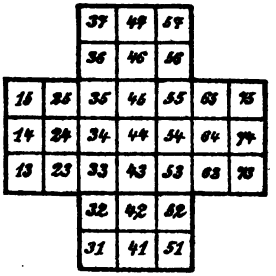


Fig. 2.

Die verschiedenen Löcher werden wir ähnlich, wie die Felder des Schachbretts im vorigen Kapitel, unterscheiden und

1) Leibniz sagt in den Miscell. Berol. l. c.: „ludus, quem Solitarium appellant“ und in dem an Rémond de Montmort gerichteten Briefe vom 17. Jan. 1716: „Le jeu nommé le Solitaire me plut assez“ (s. „Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz“, herausg. von C. J. Gerhardt, Bd. III, 1887, p. 668).

2) Dieser Name ist mir erst bekannt geworden aus einer von Prof. Fr. Engel herrührenden Besprechung der 1. Auflage dieses Buches (Liter. Centralblatt, 13. Juli 1901, col. 1140). Die Wörterbücher von Adelung und Campe bestätigen diese Angabe, geben denselben Namen aber daneben für das von uns als „Baguenaudier“ bezeichnete Spiel an (s. S. 63, Anm. 1).

3) Die beiden letzten Namen kenne ich nur aus der Schrift: „Neueste Anweisung zum Kreuz-Einsiedler- oder Kapuziner-Spiel“, Regensburg 1807.

dementsprechend auch jedes Loch fortan quadratisch darstellen, so daß wir auch promiscue von „Löchern“ und „Feldern“ sprechen werden. Wir tragen in jedes Loch gleich seine Notation ein (s. Fig. 2); von dieser gibt die erste Ziffer immer die Vertikalreihe oder „Kolonne“, von links nach rechts gerechnet, die zweite die Horizontalreihe oder „Zeile“, von unten nach oben gerechnet, an.

Die einzige Spielregel besteht darin, daß, wenn von 3 in horizontaler oder vertikaler Reihe gelegenen Löchern 2 benachbarte mit einem Pflock versehen sind, während das dritte, unmittelbar daneben liegende leer ist, alsdann der Pflock aus dem entfernteren der beiden besetzten Löcher in das leere gesteckt werden darf, während aus dem mittleren Loch, das hierbei übersprungen wird, der Pflock herausgezogen und beiseite gelegt wird. Diese Operation, die stets das Verschwinden *eines* Pflockes und für einen anderen eine Platzänderung zur Folge hat, nennen wir kurz einen „Zug“, so daß also, wenn zu Anfang z. B. nur das Loch 44 leer ist, nur einer der 4 Züge $\frac{24}{44}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{42}{44}$ möglich ist, wo in dieser auch weiterhin stets gebrauchten Bezeichnung der Züge in Form von Brüchen der Zähler das Loch angibt, aus dem ein Pflock fortgenommen, — der Nenner dasjenige, in das er gesteckt wird. Zähler und Nenner eines solchen Bruches stimmen natürlich immer entweder in den ersten oder in den letzten Ziffern überein, während die beiden nicht übereinstimmenden Ziffern sich um 2 unterscheiden; die zwischen den beiden letzteren liegende Zahl zusammen mit der im Zähler und Nenner gleicherweise vorkommenden geben dann in gehöriger Reihenfolge das Loch, über das hinweggesetzt wird, aus dem also ein Pflock verschwindet, in unserem Falle der Reihe nach: 34; 45; 54; 43.

Die Aufgabe des Spiels besteht gewöhnlich darin, **aus 32 besetzten Löchern der Reihe nach alle Pflöcke bis auf einen fortzuschaffen, wobei das zu Anfang leere Loch gewöhnlich das mittlere (44) ist, jedoch auch ein anderes sein kann, und wobei das dem letzten Pflock verbleibende Loch in der Regel auch**

vorgeschrieben ist. Selbstverständlich brauchen aber zu Anfang nicht alle 32 Löcher besetzt zu sein, sondern das ist etwa nur bei einem Teil der Löcher der Fall, in der Weise z. B., daß etwa eine symmetrische Figur, ein Quadrat, ein Kreuz oder dergleichen, von den Pflöcken gebildet wird, und die Aufgabe ist im übrigen dieselbe; oder aber es wird auch verlangt, nicht alle Pflöcke zu entfernen, sondern nur so viele, daß eine bestimmte Figur übrig bleibt, so daß schließlich als allgemeinste Aufgabe sich die ergibt: **eine bestimmte vorgeschriebene Anfangsfigur in eine bestimmte vorgeschriebene Endfigur überzuführen**, eine Aufgabe, die allerdings, wie leicht ersichtlich, keineswegs stets lösbar ist.

Leibniz, der, wie schon erwähnt, sich mit unserem Spiel beschäftigte, hat eine Umkehrung der Spielregel vorgeschlagen[1]), die er dahin faßt, daß ein Pflock über ein benachbartes leeres Loch hinweg in ein zweites leeres gesteckt und das übersprungene dann auch mit einem Pflock ausgefüllt wird; von dieser Spielregel, durch deren Anwendung mit jedem Zuge die Zahl der Pflöcke um 1 vermehrt wird und für welche die Aufgabe des Spiels natürlich in erster Linie darin besteht, **auf einem Brett mit anfänglich nur einem Pflock sukzessive alle Löcher bis auf eins auszufüllen**, wird auch weiter unten noch die Rede sein. Wir werden dort einen solchen Zug nach der Leibnizschen Spielregel kurz einen „inversen" Zug nennen im Gegensatz zu dem gewöhnlichen oder „direkten".

§ 2. Spezielle Aufgaben. — Die „Hauptaufgabe" des Spiels; Lösungen von Reiß.

Um in das Wesen des Spiels erst etwas einzuführen, besprechen wir eine Anzahl der in § 1 charakterisierten Aufgaben und zwar zunächst von solchen, in denen nur ein Teil des Brettes besetzt ist und die Entfernung aller Pflöcke bis auf einen verlangt wird. Diese Beispiele wollen wir einem

1) Leibniz: an den beiden S. 183, Anm. 3 und S. 184, Anm. 1 zitierten Stellen.

Werke von P. Busschop[1]) über das Solitärspiel entnehmen. Die in den verschiedenen Figuren mit ihrer Notation angegebenen Felder sind zu Anfang besetzt, der übrige leere Teil der Bretter kann nach Fig. 2 leicht hinzugedacht werden.

1. Das Kreuz aus 9 Pflöcken.

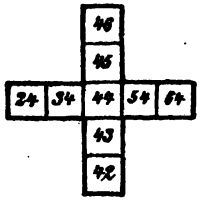


Fig. 3.

Lösung: $\frac{43}{41}$; $\frac{45}{43}$; $\frac{24}{44}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{43}{45}$; $\frac{46}{44}$.

2. Das Dreieck.

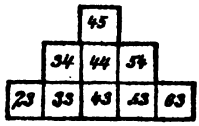


Fig. 4.

Lösung: $\frac{53}{55}$; $\frac{55}{35}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{35}{33}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{42}{44}$.

3. Das Kreuz.

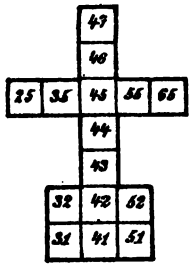


Fig. 5.

Lösung: $\frac{31}{33}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{63}{43}$, von hier ab der Fall der Aufgabe 1 (die dortige, nur parallel verschobene Figur).

---

1) Paul Busschop, „Recherches sur le jeu du solitaire", herausgeg. v. J. Busschop, Brügge 1879, p. 331, 332, 337, 338.

4. Die Pyramide.

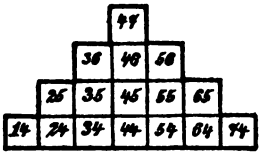


Fig. 6.

Lösung: $\frac{55}{53}$; $\frac{74}{54}$; $\frac{53}{55}$; $\frac{55}{57}$; $\frac{57}{37}$; $\frac{35}{33}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{33}{35}$; $\frac{36}{56}$; $\frac{44}{46}$; $\frac{56}{36}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{35}{55}$; $\frac{65}{45}$.

Selbstverständlich sind aber keineswegs alle Aufgaben dieser Art lösbar; wir beschränken uns in dieser Hinsicht auf ein einfaches Beispiel, nämlich den Fall, daß anfänglich nur 3 Felder von der in Fig. 7 angegebenen gegenseitigen Lage besetzt sind: Man erkennt sofort, daß man, gleichgültig wo auf dem Brett diese Figur liegt, einen und nur einen Pflock fortbringen kann, also zwei übrigbleiben müssen.

Fig. 7.

Wieder ein anderer, gleichfalls schon in § 1 erwähnter Aufgabentypus, gewissermaßen das Gegenstück zu dem soeben betrachteten, ist charakterisiert durch die Forderung, das vollbesetzte Brett so weit zu entleeren, daß nur eine bestimmte Figur übrig bleibt. Wir wollen auch hierfür eine Anzahl Beispiele geben[1]): anfänglich soll stets das ganze Brett besetzt und nur das Mittelfeld leer sein; übrig bleiben soll stets die schraffierte Figur.

A. Das kleine Kreuz.

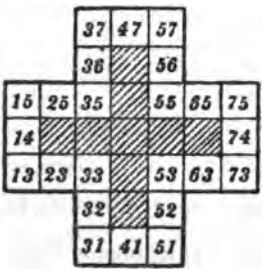


Fig. 8.

$\frac{42}{44}$; $\frac{45}{43}$; $\frac{47}{45}$; $\frac{24}{44}$; $\frac{44}{46}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{43}{45}$; $\frac{45}{47}$.

1) Ich entnehme diese der schon oben (S. 184, Anm. 3) zitierten Schrift von 1807; siehe dort p. 9, 26, 38, 39, 41.

B. „Acht um den König".

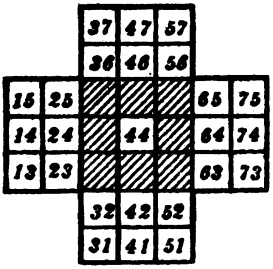


Fig. 9.

$\frac{42}{44}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{51}{31}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{53}{51}$; $\frac{73}{53}$;
$\frac{54}{52}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{45}{43}$; $\frac{36}{34}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{37}{35}$;
$\frac{65}{45}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{45}{65}$; $\frac{47}{45}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{74}{54}$.

C.

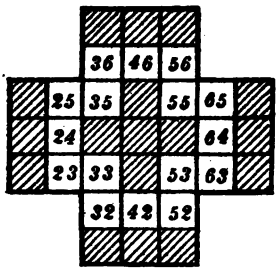


Fig. 10.

$\frac{42}{44}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{55}{53}$; $\frac{52}{54}$; $\frac{65}{63}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{36}{56}$;
$\frac{55}{57}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{25}{23}$; $\frac{33}{13}$; $\frac{35}{33}$; $\frac{32}{34}$.

D.

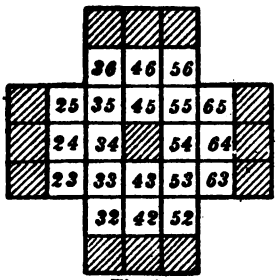


Fig. 11.

$\frac{42}{44}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{32}{52}$; $\frac{53}{51}$; $\frac{65}{63}$; $\frac{55}{53}$; $\frac{63}{43}$;
$\frac{57}{55}$; $\frac{36}{56}$; $\frac{55}{57}$; $\frac{24}{44}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{42}{44}$; $\frac{44}{46}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{46}{44}$.

E.

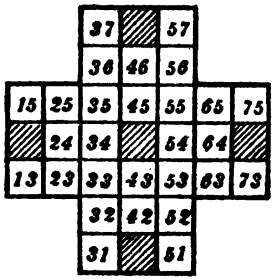


Fig. 12.

$\frac{42}{44}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{13}{33}$;
$\frac{25}{23}$; $\frac{45}{25}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{54}{34}$; $\frac{35}{33}$; $\frac{32}{34}$; $\frac{56}{54}$; $\frac{75}{55}$;
$\frac{37}{35}$; $\frac{35}{33}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{54}{56}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{63}{65}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{65}{45}$; $\frac{46}{44}$.

Gewöhnlich besteht die Aufgabe bei unserem Spiel jedoch, wie schon in § 1 gesagt, darin, daß zu Anfang alle 32 Pflöcke in den Löchern stecken, während ein beliebig vorgeschriebenes Loch, von uns weiterhin stets als das „Anfangsloch" bezeichnet, leer ist, und daß nun der Reihe nach alle Pflöcke bis auf einen entfernt werden sollen, welch letzterer dann in einem gleichfalls in der Regel vorgeschriebenen Loch, weiterhin kurz „Schlußloch" genannt, stecken bleiben soll. Um auch diese Aufgabe, von der fortan immer nur kurz als der „**Hauptaufgabe des Spiels**"[1]) die Rede sein wird, auseinanderzusetzen, reproduzieren wir im folgenden 16 solcher Aufgaben mit Lösungen, die M. Reiß, der Begründer einer mathematischen Theorie unseres Spiels, gegeben hat.[2]) Der Leser mag diese Aufgaben hier vorläufig nur als willkürlich aus einer großen Zahl herausgegriffene Beispiele ansehen; die Folge (§ 5) wird jedoch zeigen, daß unsere Auswahl keine willkürliche, sondern vielmehr so getroffen war, daß mit den jetzt folgenden 16 Fällen im Grunde genommen die Gesamtheit aller überhaupt lösbaren Fälle der „Hauptaufgabe des Spiels" erschöpft ist.

I. Anfangsloch: 44; Schlußloch: 44.

$$\frac{64}{44};\ \frac{56}{54};\ \frac{44}{64};\ \frac{52}{54};\ \frac{73}{53};\ \frac{75}{73};\ \frac{43}{63};\ \frac{73}{53};\ \frac{54}{52};\ \frac{35}{55};\ \frac{65}{45};\ \frac{15}{35};\ \frac{45}{25};\ \frac{37}{35};\ \frac{57}{37};\ \frac{34}{36};$$

$$\frac{37}{35};\ \frac{25}{45};\ \frac{46}{44};\ \frac{23}{43};\ \frac{31}{33};\ \frac{43}{23};\ \frac{51}{31};\ \frac{52}{32};\ \frac{31}{33};\ \frac{14}{34};\ \frac{34}{32};\ \frac{13}{33};\ \frac{32}{34};\ \frac{34}{54};\ \frac{64}{44}.$$

II. Anfangsloch: 44; Schlußloch: 74.

Wie I, nur statt des letzten Zuges: $\frac{54}{74}$.

---

1) Wir werden zwar vorläufig, wenn von „Hauptaufgabe des Spiels" die Rede ist, voraussetzen, daß auch das Schlußloch vorgeschrieben sei, werden diesen Ausdruck späterhin (§§ 7, 8) aber auch dann noch beibehalten, wenn dies nicht der Fall, also nur das Anfangsloch vorgeschrieben ist.

2) Reiß, „Beiträge zur Theorie des Solitärspiels", Crelles Journal, Bd. 54, 1857, p. 376—379. Die Bezeichnung der Felder bei Reiß ist eine andere; wir haben (Fig. 2) die praktischere, der Vandermondeschen Schachfeldernotation (s. Kap. XI, § 2) entsprechende Lucassche („Récréations mathém.", I, p. 93) akzeptiert.

III. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 74.

Der erste Zug von II ist durch $\frac{54}{74}$ zu ersetzen.

IV. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 47.

$\frac{54}{74}; \frac{52}{54}; \frac{44}{64}; \frac{73}{53}; \frac{74}{54}; \frac{54}{52}; \frac{51}{53}; \frac{31}{51}; \frac{32}{52}; \frac{43}{63}; \frac{51}{53}; \frac{63}{43}; \frac{34}{32}; \frac{13}{33}; \frac{15}{13}; \frac{43}{23}; \frac{13}{33}; \frac{32}{34}; \frac{56}{54}; \frac{75}{55}; \frac{54}{56}; \frac{57}{55}; \frac{37}{57}; \frac{36}{56}; \frac{45}{65}; \frac{57}{55}; \frac{65}{45}; \frac{24}{44}; \frac{44}{46}; \frac{25}{45}; \frac{45}{47}.$

V. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 14.

Zunächst die ersten 24 Züge von IV, dann $\frac{34}{36}; \frac{55}{35}; \frac{57}{55}; \frac{25}{45}; \frac{55}{35}; \frac{36}{34}; \frac{34}{14}.$

VI. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 54.

$\frac{56}{54}; \frac{75}{55}; \frac{54}{56}; \frac{74}{54}; \frac{53}{55}; \frac{73}{53}; \frac{43}{63}; \frac{51}{53}; \frac{63}{43}; \frac{33}{53}; \frac{41}{43}; \frac{53}{33}; \frac{23}{43}; \frac{31}{33}; \frac{43}{23}; \frac{13}{33}; \frac{15}{13}; \frac{25}{23}; \frac{34}{32}; \frac{13}{33}; \frac{32}{34}; \frac{45}{25}; \frac{37}{35}; \frac{57}{37}; \frac{34}{36}; \frac{37}{35}; \frac{25}{45}; \frac{56}{36}; \frac{44}{46}; \frac{36}{56}; \frac{56}{54}.$

VII. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 57.

Der letzte Zug von VI ist durch $\frac{55}{57}$ zu ersetzen.

VIII. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 57.

Der erste Zug von VII ist durch $\frac{55}{57}$ zu ersetzen.

IX. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 24.

Die ersten 27 Züge von VI, alsdann $\frac{56}{54}; \frac{54}{34}; \frac{46}{44}; \frac{44}{24}.$

X. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 24.

Der erste Zug von IX ist zu ersetzen durch $\frac{55}{57}$.

XI. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 51.

Zunächst die ersten 6 Züge von X; die 24 folgenden leiten sich aus den entsprechenden von VI durch Spiegelung an der horizontalen Mittellinie her; der letzte Zug ist $\frac{53}{51}$.

XII. Anfangsloch: 24; Schlußloch: 24.

$$\frac{44}{24};\ \frac{36}{34};\ \frac{15}{35};\ \frac{34}{36};\ \frac{37}{35};\ \frac{57}{37};\ \frac{56}{36};\ \frac{45}{25};\ \frac{37}{35};\ \frac{25}{45};\ \frac{32}{34};\ \frac{13}{33};\ \frac{34}{32};\ \frac{31}{33};\ \frac{51}{31};\ \frac{52}{32};$$

$$\frac{43}{23};\ \frac{31}{33};\ \frac{23}{43};\ \frac{54}{56};\ \frac{75}{55};\ \frac{73}{75};\ \frac{45}{65};\ \frac{75}{55};\ \frac{56}{54};\ \frac{64}{44};\ \frac{44}{42};\ \frac{63}{43};\ \frac{42}{44};\ \frac{14}{34};\ \frac{44}{24}.$$

XIII. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 55.

$$\frac{53}{55};\ \frac{73}{53};\ \frac{75}{73};\ \frac{65}{63};\ \frac{52}{54};\ \frac{73}{53};\ \frac{54}{52};\ \frac{51}{53};\ \frac{31}{51};\ \frac{32}{52};\ \frac{43}{63};\ \frac{51}{53};\ \frac{63}{43};\ \frac{45}{65};\ \frac{57}{55};\ \frac{65}{45};$$

$$\frac{35}{55};\ \frac{47}{45};\ \frac{55}{35};\ \frac{25}{45};\ \frac{37}{35};\ \frac{45}{25};\ \frac{15}{35};\ \frac{13}{15};\ \frac{23}{25};\ \frac{34}{36};\ \frac{15}{35};\ \frac{36}{34};\ \frac{33}{53};\ \frac{34}{54};\ \frac{53}{55}.$$

XIV. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 52.

Der letzte Zug von XIII ist zu ersetzen durch $\frac{54}{52}$.

XV. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 52.

Der erste Zug von XIV ist zu ersetzen durch $\frac{54}{52}$.

XVI. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 25.

Die 28 ersten Züge von XV, dann $\frac{43}{23};\ \frac{44}{24};\ \frac{23}{25}$.

Selbstverständlich kann es für jede der vorstehenden 16 Aufgaben noch andere und zumeist sogar recht viele andere Lösungen geben. Die von uns angegebenen erheben keinen Anspruch darauf, einen Vorzug vor anderen zu besitzen; ihre Auswahl war nur durch die Rücksicht auf den Gebrauch, den wir in § 5 hiervon zu machen gedenken, bestimmt. Unter den sonst existierenden Lösungen werden sich auch gewiß viel elegantere vorfinden. Sehr viel besser gegliedert und daher übersichtlicher ist z. B. folgende Lösung für Aufgabe I:

$$\frac{42}{44};\ \frac{63}{43};\ \frac{51}{53};\ \frac{43}{63};\ \frac{23}{43};\ \frac{44}{42};\ \frac{31}{33};\ \frac{41}{43};\ \frac{43}{23} \parallel \frac{13}{33};\ \frac{34}{32};\ \frac{15}{13};\ \frac{25}{23};\ \frac{13}{33};\ \frac{32}{34} \parallel$$

$$\frac{73}{53};\ \frac{54}{52};\ \frac{75}{73};\ \frac{65}{63};\ \frac{73}{53};\ \frac{52}{54} \parallel \frac{45}{65};\ \frac{57}{55};\ \frac{37}{57};\ \frac{54}{56};\ \frac{57}{55};\ \frac{65}{45};\ \frac{46}{44};\ \frac{44}{24};\ \frac{36}{34};\ \frac{24}{44},$$

wobei die durch 2 vertikale Striche markierten Stellen sich nach den jeweiligen Konfigurationen als natürliche Einschnitte in dem Gange der Lösung darstellen.

§ 3. Symmetrie des Brettes; Reziprozität von „Hauptaufgaben"

Eine mathematische Theorie unseres Spiels ahnte bereits Leibniz, obwohl er selbst nichts getan hat, sie zu begründen.[1]) Es werde, sagt er, nicht möglich sein, jede irgendwie vorgeschriebene Figur seiner („inversen") Spielregel gemäß herzustellen, resp. im Sinne der gewöhnlichen Spielregel gesprochen: bei irgendwie vorgegebener Anfangsfigur das Brett zu leeren. Vorher zu erkennen, in welchen Fällen das Verlangte möglich, in welchen es unmöglich wäre, würde eine große Kunst sein, und sicher werde dies Verfahren einen mathematischen Charakter tragen („haberetque aliquid Geometricum hic processus").[2]) Eine eigentlich mathematische Theorie wurde für unser Spiel erst, wie schon gesagt, von M. Reiß[3]) begründet und dann von Hermary[4]) weiter ausgebaut. Wir bleiben nur auf dem Boden des von Leibniz freilich nur sehr flüchtig hingeworfenen Programms, wenn wir als Hauptfrage einer mathematischen Spieltheorie die folgende bezeichnen: „**bei welchen Kombinationen von Anfangs- und Schlußloch ist die 'Hauptaufgabe des Spiels' (s. S. 190) lösbar und bei welchen nicht?**" Da entsteht nun zunächst die Vorfrage nach der Anzahl der wesentlich verschiedenen unter diesen „Kombinationen". Beachtet man, daß die Figur des Bretts bei Drehung um einen oder mehrere rechte Winkel mit sich selbst zur Deckung kommt, und ferner, daß sie in bezug auf jede ihrer beiden Mittellinien, die vertikale wie horizontale, symmetrisch ist, so daß also bei Spiegelung an einer dieser beiden die eine Hälfte der Figur mit der anderen zur Deckung kommt, so sieht man, daß die bei diesen

1) Vgl. a. Cantor, „Gesch.", III (2. Aufl.), p. 355.

2) Miscellanea Berol. 1710, p. 24.

3) Reiß, l. c. p. 344—379. Eine französische Bearbeitung dieser Reißschen Abhandlung gab Ruchonnet in Catalans Nouvelle correspondance mathématique, t. III, 1877 (s. liter. Index).

4) Harmary, „Sur le jeu du solitaire", Assoc. franç. pour l'avanc. des sc., VIII, Congrès de Montpellier 1879, p. 284—294.

Spiegelungen und Drehungen in einander übergehenden Felder offenbar für unsere Aufgabe äquivalent sind und sich danach folgende Gruppen von untereinander äquivalenten Feldern ergeben:

1) 13; 15; 37; 57; 75; 73; 51; 31.
2) 14; 47; 74; 41.
3) 25; 36; 56; 65; 63; 52; 32; 23.
4) 24; 46; 64; 42.
5) 35; 55; 53; 33.
6) 34; 45; 54; 43.
7) 44.

Noch eine weitere Beziehung verdient herangezogen zu werden, um die Anzahl der wesentlich verschiedenen Aufgaben weiter zu reduzieren. Denken wir uns nämlich eine „Hauptaufgabe" gelöst und die Lösung in der Form dargestellt wie bei den in § 2 (S. 190—192) behandelten XVI Aufgaben, so würde, sobald in diesem Schema die Reihenfolge aller Brüche umgekehrt und jeder einzelne in seinen reziproken verkehrt würde, dieses neue Schema ein Verfahren angeben, um bei Anwendung von „inversen" Zügen nach der oben (S. 186) angegebenen Leibnizschen Spielregel aus dem früheren Schlußloch als jetzt einzig besetztem Anfangsloch das System der 32 Pflöcke herzustellen, wobei das frühere Anfangsloch jetzt zum Schluß allein leer bleiben würde. Jeder inverse Zug hebt nämlich die Wirkung des entsprechenden „direkten" wieder auf, die Anfangsstellung muß sich daher wieder aus der Schlußstellung ergeben. Ein Umkehren jedes einzelnen Bruches war nötig, da jeder Zug jetzt in der umgekehrten Richtung erfolgt als bei dem direkten Verfahren. Denken wir uns nun diese nach Leibnizschem Verfahren erzielte Lösung in ihren sukzessiven Stellungen figürlich dargestellt und in jeder dieser Figuren an die Stelle von besetzten Löchern leere und umgekehrt gesetzt, so kommen wir offenbar zu einer Lösung nach dem direkten Verfahren, und zwar ist das Anfangsloch dieser Lösung offenbar das Schlußloch derjenigen, von der wir ausgingen, und vice versa. Nur

müssen wir dann, wenn wir unserer alten Schreibweise treu bleiben wollen, nämlich in den Zähler eines Bruches das besetzte Loch, in den Nenner das leere, nach welchem gezogen wird, zu schreiben, — in der schematischen Darstellung der Lösung nochmals von allen Brüchen das Reziproke nehmen, so daß wir also zu den anfänglichen Brüchen zurückkehren und nur ihre Reihenfolge untereinander umgekehrt bleibt. Wir sehen also, daß die Aufgabe mit dem Anfangsloch a und dem Schlußloch b zugleich mit derjenigen mit dem Anfangsloch b und dem Schlußloch a gelöst ist; 2 solche Hauptaufgaben wollen wir „reziproke" nennen.

§ 4. Erweiterte Spielregel Reiß'. Kriterien der Unlösbarkeit.

Nach den Vorbemerkungen des vorigen Paragraphen, die uns später in den Stand setzen werden, die Zahl der wesentlich verschiedenen Fälle auf eine geringe Anzahl zu reduzieren, wenden wir uns der ingeniösen Methode zu, die Reiß anwandte, um gewisse Aufgaben als unlösbar zu erweisen. Reiß tat dies, indem er die Spielregeln erweiterte[1]) und nun nachwies, daß auch bei diesen erweiterten Regeln gewisse Unmöglichkeiten bestehen, die dann a fortiori in dem Falle der beschränkteren Regeln bestehen müssen. Diese Erweiterungen der Spielregeln lauten in der durch Hermary[2]) vervollkommneten Form folgendermaßen:

1) Das Spielbrett soll sich nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstrecken, die Anzahl der Löcher also unbegrenzt sein.

2) Es ist gestattet, direkte und inverse Züge beliebig durcheinander zu tun.

3) Es ist zulässig, daß in ein schon besetztes Loch noch weitere Pflöcke gesteckt werden, sowie auch, daß ein leeres Loch ein oder mehrere Pflöcke entleiht, wenn es dieselben nur später zurückerstattet.

---

1) Reiß, l. c. p. 347 ff.

2) Siehe Hermary, l. c. p. 285.

Aus 3) folgt insbesondere, was wir ausdrücklich und gesondert formulieren wollen:

4) Jeder Zug, ob direkt oder invers, ist auch dann gestattet, wenn das Feld, nach dem gezogen wird, bereits besetzt ist, so daß dorthin also 2 oder mehr Pflöcke kommen. Ein inverser Zug ist auch dann gestattet, wenn das zwischenliegende Feld besetzt ist; auch wenn es mehrfach besetzt ist, ist jeder Zug, direkt wie invers, zulässig. Ein direkter Zug ist gestattet, auch wenn das zwischenliegende Feld leer ist; dieses muß dann nur auf grund von 3) einen Pflock entleihen, der allerdings dann sofort durch den Zug verloren geht, und muß ihn dann später zurückerstatten.

Bei unserer erweiterten Spielregel ist der Effekt jedes Zuges in bezug auf die Anzahl der Pflöcke der, daß von 3 aufeinanderfolgenden Feldern das mittlere eine Vermehrung oder Verminderung um einen Pflock, von den beiden äußeren das eine eine Vermehrung, das andere aber eine Verminderung um je einen Pflock erfährt, so daß sich also für jedes der 3 Felder die Anzahl der Pflöcke um ± 1 ändert. — Wir werden von dieser „Vorbemerkung“ gleich noch Gebrauch machen.

Die erweiterten Spielregeln ergeben ferner folgende Konsequenzen:

Satz I: *Einem beliebigen Loch kann man ohne jede sonstige Änderung 2 Pflöcke nehmen oder hinzufügen.*

Ist B das betreffende Loch und A und C seine beiden Nachbarlöcher entweder in derselben Zeile oder derselben Kolonne (Randfelder sind ja bei unbegrenztem Brett nicht zu berücksichtigen), so zieht man, um B zwei Pflöcke zu nehmen, von A nach C „direkt“ und dann von C nach A „direkt“ und, um B 2 Pflöcke hinzuzufügen, ebenso, nur beide Male „invers“. Ob A und C leer oder besetzt sind, ist hierbei nach 3) und 4) gleichgültig.

Satz II: *Von 3 aufeinanderfolgenden Löchern derselben Zeile oder Kolonne kann man stets je einen Pflock fortnehmen.*

Man braucht nur von dem einen äußeren Feld einen direkten Zug nach dem anderen äußeren zu tun und dann in

dem letzteren auf grund von Satz I die Zahl der Pflöcke um 2 zu vermindern. Natürlich kann man auch ebensogut den 3 Feldern je einen Pflock zugeben.

Satz III: *Man kann stets einen Pflock 2 Felder derselben Zeile oder Kolonne überschreiten lassen und auf das dritte Feld setzen ohne jede sonstige Änderung.*

Sind nämlich A, B, C, D 4 in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende Felder derselben Zeile oder Kolonne, so tue man von A aus einen inversen Zug nach C, wodurch ein Pflock von A nach C wandert und die Zahl der Pflöcke in B um einen wächst. Zieht man nun von B nach D direkt, so ist die Zahl der Pflöcke in B und C wieder die ursprüngliche, während sich die in D um 1 vermehrt, so daß also im ganzen ein Pflock von A nach D gewandert ist.

Wegen der großen Bedeutung, die der Satz III im folgenden erlangen wird, führen wir für 2 Felder von der gegenseitigen Lage der eben betrachteten Felder A und D eine besondere Bezeichnung ein und nennen sie „kongruent", und zwar soll diese Bezeichnung auch für zwei Felder gelten, von deren einem ein Übergang zum anderen erst durch mehrmalige sukzessive Ausführung von Sprüngen nach Art des von A nach D möglich ist, so daß also z. B. Feld 15 (Fig. 2, S. 184) nicht nur dem Feld 45, sondern auch den Feldern 75 und 42 „kongruent" ist. Ferner soll jedes Feld als sich selbst kongruent gelten. Wenn wir uns die ganze unbegrenzte Spielebene also in neunfeldrige Quadrate geteilt denken, wie Fig. 13 es veranschaulicht[1]), so sind die entsprechenden Felder aller dieser Quadrate unter sich „kongruent", und wir können nach Satz III alle Pflöcke des ganzen Brettes auf eins dieser kleinen Quadrate bringen, indem wir alle Quadrate mit ihren Pflöcken parallel mit sich in horizontaler und vertikaler Richtung so weit verschieben, bis sie dem ausgewählten alle übergelagert sind. Die so erhaltene Stellung sei

1) Natürlich könnten wir das ganze Gittersystem der Fig. 13 auch um 1 oder 2 Kolonnen nach rechts resp. um 1 oder 2 Zeilen nach oben verschieben.

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}.$$

Dieses Quadrat werde nun durch inverse Züge übergeführt in eins von 4 Feldern, indem wir zunächst

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} & \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} & 0 \\ \varepsilon_{21} + \varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} & 0 \\ \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} & \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} & 0 \end{vmatrix}$$

und dann

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} & \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{21} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} & \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

erhalten. Auf grund von Satz I kann nun die Anzahl der Pflöcke in jedem der 4 Felder des Quadrats (2) auf 1 oder 0 reduziert werden. Diese Stellung nennen wir dann kurz die „reduzierte“ Stellung unserer anfänglichen.

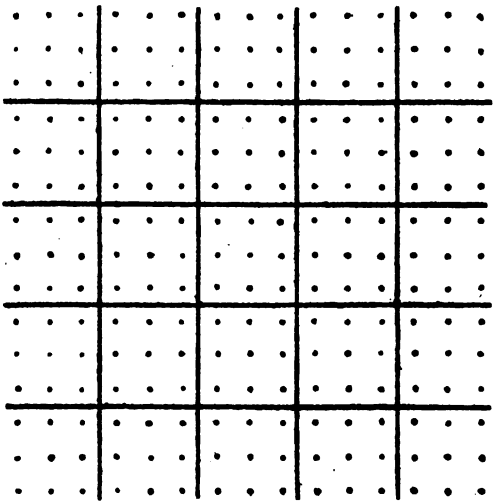


Fig. 13.

Es seien nun mit A und B irgend 2 Stellungen bezeichnet, die auf grund der erweiterten Spielregel ineinander überführbar

sind, d. h. durch Ausführung einer gewissen Reihe von Zügen soll A in B übergehen und umgekehrt. Führen wir nun A und B in ihre bezüglichen „reduzierten" Stellungen mit bezug auf dasselbe Quadrat des Bretts über, so müssen, behaupten wir, diese reduzierten Stellungen identisch sein: Nach Voraussetzung geht bei Ausführung gewisser Züge A in B über. Der Effekt jedes Zuges ist nun, wie schon oben angemerkt wurde (s. S. 196 die sogen. „Vorbemerkung"), der, daß die Anzahlen der Pflöcke in 3 in einer Zeile oder Kolonne aufeinanderfolgenden Feldern sich um ± 1 ändern. Dies bedeutet aber, wie man sofort erkennt (s. Fig. 13), daß infolge jedes Zuges 3 unserer Größen ε von (1) und zwar solche, die entweder in dem ersten oder in dem zweiten Index übereinstimmen, die angegebene Änderung um ± 1 erfahren, eine Änderung, die 0 oder ± 2 für jedes der 4 Felder unseres Quadrats (2) ausmacht, da dort immer in jedem Glied gerade 2 in dem ersten oder dem letzten Index übereinstimmende ε vorkommen; eine Änderung um 2 ist jedoch (s. Satz I) belanglos. Wir sehen also, daß die Reihe der Züge, die zur Überführung von A in B resp. umgekehrt nötig sind, auf die reduzierte Stellung ohne Einfluß bleibt, diese vielmehr für A und B und auch für jede in eine von ihnen überführbare dritte Stellung dieselbe ist, wofern wir die reduzierte Stellung stets in bezug auf dasselbe vierfeldrige Gebiet des Brettes angeben. Damit haben wir zunächst ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal für wesentlich verschiedene Stellungen bekommen und formulieren dieses folgendermaßen:

Theorem I: *Alle auf grund der erweiterten Spielregel ineinander überführbaren Stellungen ergeben mit bezug auf dasselbe Quadrat von 4 Feldern die gleiche „reduzierte" Stellung, und umgekehrt sind irgend 2 Stellungen, deren „reduzierte" Stellungen in bezug auf dasselbe 4-feldrige Quadrat des Bretts gleich sind, nach der erweiterten Spielregel ineinander überführbar.*

Die gleich mit angegebene Umkehrung ergibt sich natürlich einfach auf grund der Überlegung, daß sich aus der reduzierten Stellung auch umgekehrt die ursprüngliche auf grund der erweiterten Spielregel herleiten lassen muß.

An diese Betrachtungen, die es mit dem allgemeinen Problem der Überführung irgendwie beschaffener Stellungen in einander zu tun hatten, knüpfen wir mit Rücksicht auf die in der Spielpraxis zumeist vorkommenden Aufgaben, insbesondere auch die „Hauptaufgabe" des Spiels, einige Folgerungen speziellerer Natur und fassen zunächst den Fall ins Auge, daß die gestellte Aufgabe darin besteht, alle Pflöcke einer gegegeben Stellung bis auf einen zu entfernen.

Falls sich dabei aus der gegebenen Stellung das eine Mal das eine, das andere Mal das andere Schlußloch ergibt, so müssen diese beiden Schlußstellungen nach dem vorstehenden Theorem I dieselbe reduzierte Stellung besitzen, nämlich die gleiche wie die Anfangsstellung. Zwei nur aus je einem Loch bestehende Stellungen besitzen aber dieselbe reduzierte Stellung dann und nur dann, behaupten wir, wenn die beiden Löcher kongruent sind: Die reduzierte Stellung einer nur aus einem Loch bestehenden Stellung ist doch dadurch charakterisiert, daß von den 9 Größen ε des Quadrats (1) acht $= 0$ und eine $= 1$ ist. Das $= 1$ sich ergebende ε ist nun bei zwei verschiedenen Löchern — dasselbe 9-feldrige Quadrat (1) vorausgesetzt — dann und nur dann dasselbe, wenn die beiden Löcher kongruent sind. Haben wir aber in beiden Fällen verschiedene ε, so sind auch die reduzierten Stellungen verschieden; denn es gibt unter den 9 Größen ε kein Paar derart, daß die zwei in dem 4-feldrigen Quadrat (2) überall auf den gleichen Feldern vorkämen. Die beiden reduzierten Stellungen können also nur dadurch einander gleich werden, daß die beiden ε identisch sind. Wir dürfen somit sagen:

Zusatz I: *Die verschiedenen Schlußlöcher, die aus derselben Anfangsstellung bei verschiedenen Lösungsverfahren resultieren, müssen einander kongruent sein.*

Weiter folgt:

Zusatz II: *Wenn für eine gegebene Stellung ein bestimmtes Loch als Schlußloch unmöglich ist, so gilt dies auch von jedem ihm kongruenten Schlußloch.*

Für die gegebene Stellung einerseits und das erste Loch andererseits sind nämlich, da sie nicht ineinander überführbar sein sollen, nach Theorem I (Teil 2) die reduzierten Stellungen verschiedene, also auch für die gegebene Stellung einerseits und das zweite dem ersten kongruente Loch andererseits, da die beiden kongruenten Löcher dieselbe reduzierte Stellung besitzen. Dann ist aber die Überführung der gegebenen Stellung in das zweite Loch nach Theorem I (Teil 1) ausgeschlossen.

Nach diesen aus Theorem I gezogenen Folgerungen speziellerer Natur, die sich noch weiter vermehren ließen, kehren wir wieder zu unseren allgemeineren Betrachtungen zurück: Da auf den 4 Feldern des Quadrats der reduzierten Stellung sich je 0 oder 1 Pflock befindet (vgl. S. 198), so sind hiernach offenbar $2^4 = 16$ verschiedene reduzierte Stellungen möglich; diese ordnen sich wieder, wie folgt, in 4 Klassen:

I. Kl.: $\begin{vmatrix}00\\00\end{vmatrix}$

II. Kl.: $\begin{vmatrix}00\\10\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}00\\01\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}01\\00\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}10\\00\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}00\\11\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}11\\00\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}10\\10\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}01\\01\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}11\\11\end{vmatrix}$

III. Kl.: $\begin{vmatrix}11\\01\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}10\\11\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}01\\10\end{vmatrix}$

IV. Kl.: $\begin{vmatrix}01\\11\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}11\\10\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}10\\01\end{vmatrix}$.

Zu derselben Klasse gehören dabei diejenigen Typen, die in solcher Beziehung zueinander stehen, daß der eine an die Stelle des anderen treten kann, wenn auf dem Brett das Quadrat der 4 Felder anders gewählt wird, wie man durch Verlegung des betreffenden Quadrats, d. h. durch Anwendung der Spielregel auf je eine der horizontalen oder vertikalen Reihen leicht erkennt. Hiernach gelangen wir dazu, auch Stellungen, die auf verschiedene Quadrate reduziert sind, zu ver-

gleichen, und dürfen auf grund von Theorem I offenbar folgendes allgemeinere Kriterium der Unlösbarkeit aufstellen:

Theorem II: *Irgend 2 Stellungen sind auch bei erweiterter Spielregel nicht ineinander überführbar, wenn ihre mit bezug auf 2 ganz beliebige Quadrate reduzierten Stellungen nicht derselben „Klasse" angehören.*[1])

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß umgekehrt aus der Zugehörigkeit der reduzierten Stellungen zu derselben Klasse noch keineswegs die Überführbarkeit der betreffenden ursprünglichen Stellungen ineinander folgt.

§ 5. Das Solitärspiel mit 33 Löchern.

Nach diesen allgemeineren Betrachtungen kehren wir zu unserem bestimmten Fall eines Brettes von 33 Feldern mit der beschränkteren (gewöhnlichen) Spielregel zurück, indem wir schließen dürfen, daß dort, wo sich vorher bei größerer Allgemeinheit und größerer Spielfreiheit Unlösbarkeit ergeben hatte, diese jetzt a fortiori besteht.

Auf grund der zu Anfang des § 3 besprochenen Symmetrieverhältnisse dürfen wir uns hinsichtlich der „Hauptaufgabe" darauf beschränken, aus jeder der dort (S. 194) angegebenen 7 Gruppen *ein* Feld als Anfangsfeld zu wählen; es seien dies die Felder:

57, 74, 52, 24, 55, 54, 44.

Nun zeigen uns die Aufgaben VIII, III, XV, XII, XIII, VI und I des § 2, S. 190—192 mit ihren dort angegebenen Reißschen Lösungen, daß jedes unserer 7 Felder zugleich Anfangsloch und Schlußloch sein kann; die Hauptaufgabe des Spiels ist somit bei gleichem Anfangs- und Schlußloch durch die Lösungen des § 3 für alle 33 Felder erschöpfend gelöst.

---

1) Diese Hermary gehörenden Untersuchungen sind von ihm auch auf eine allgemeinere Spielform, ein Solitärspiel $n$ter Ordnung, d. h. ein solches, bei dem immer über je n Felder hinweggesetzt und dabei diese n geleert werden, ausgedehnt (l. c. p. 293 u. 294).

Wenn nun für die Hauptaufgabe des Spiels als Schlußloch erstens das Anfangsloch selbst stets zulässig ist, so muß nach § 4, S. 200 (Zusatz I zu Theorem I) jedes andere mögliche Schlußloch auch bei erweiterter Spielregel dem ersten, d. h. dem Anfangsloch, kongruent sein; wir dürfen also sagen:

Bei beliebigem Anfangsloch muß das Schlußloch diesem jedenfalls kongruent sein.

Es entsteht jetzt nur noch die umgekehrte Frage, ob denn nun auch jedes dem Anfangsloch kongruente Loch Schlußloch sein darf, — mit anderen Worten, ob die soeben angegebene Bedingung der Lösbarkeit nicht bloß notwendig, sondern auch hinreichend ist. Zu dem Ende haben wir alle verschiedenen Kombinationen von je zwei verschiedenen, jedoch kongruenten Feldern zu berücksichtigen. Wir beginnen mit der einfachsten der 7 Gruppen des § 3, der nur aus einem Feld bestehenden letzten, und bemerken, daß alle zu Feld 44 kongruenten Felder gerade in Gruppe 2 stehen, und diese Felder von Gruppe 2 sind auch unter sich kongruent und besitzen kongruente Felder in den anderen 5 Gruppen nicht. Die Gruppen 2 und 7 bilden also eine gewisse Gemeinschaft in der Art, daß, wenn das Anfangsloch dieser Gemeinschaft entnommen wird, auch das Schlußloch ihr entnommen werden muß, wenn die Hauptaufgabe überhaupt irgendwelche Aussicht auf Lösbarkeit bieten soll. Offenbar ergeben sich innerhalb dieser Gemeinschaft nur folgende wesentlich verschiedene Fälle von Aufgaben (bei ungleichem Anfangs- und Schlußloch):

Anfangsloch	Schlußloch
44	74
74	47
74	14

Diese Aufgaben sind aber in § 2, S. 190/191 unter II, IV, V behandelt. Rechnet man dazu noch die Nummern I und III für die Fälle eines gleichen Anfangs- und Schlußlochs, so umfassen also die Nummern I—V alle wesentlich verschiedenen Fälle, die innerhalb der von den Feldergruppen 2 und 7 gebildeten

Gemeinschaft vorkommen können. Für jeden anderen Fall läßt sich aus einem dieser 5 die Lösung sofort deduzieren durch die Beziehungen der Symmetrie (Drehungen und Spiegelungen) und der Reziprozität (Vertauschung von Anfangs- und Schlußloch). — Entsprechend bilden die Gruppen 1, 4 und 6 eine Gemeinschaft: zwar ist nicht jedes Feld dieser Gemeinschaft jedem anderen kongruent, aber jedes zu einem Felde dieser Gemeinschaft kongruente Feld gehört wieder der Gemeinschaft an. Die verschiedenen Fälle, die sich innerhalb dieses Gebietes ergeben, sind in § 2 durch die Nummern VI—XII erledigt. Schließlich bilden die Gruppen 3 und 5 eine dritte Gemeinschaft, der in § 2 die Lösungen XIII—XVI zugehören.

Wir sehen hiernach, daß *für ein Brett von 33 Feldern die „Hauptaufgabe des Spiels" mit beliebigem Anfangsloch lösbar ist, wenn als Schlußloch ein beliebiges, dem Anfangsloch nur kongruentes Loch vorgeschrieben ist*, und daß die von Reiß angegebenen XVI Lösungen für jeden dieser Fälle eine Lösung zu liefern imstande sind.

§ 6. Tripelzüge.

Es sei hier gestattet, eine Bemerkung besonderer Natur einzufügen. Beschäftigt man sich damit, bestimmte Aufgaben unseres Spiels zu lösen, so wird man bemerken, daß eine Folge von Zügen häufig wiederkehrt; es sind dies die Züge $\frac{A}{A'}$, $\frac{D}{B}$, $\frac{A'}{A}$ bei der in nebenstehender Fig. 14 angegebenen gegenseitigen Lage der Felder, wenn A, B, C, D besetzt und A' leer ist.

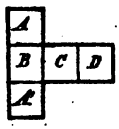


Fig. 14.

Ist A' besetzt und dafür A leer, so tut man die Züge $\frac{A'}{A}$, $\frac{D}{B}$, $\frac{A}{A'}$. Der Effekt ist in beiden Fällen derselbe, nämlich der, daß die Felder B, C, D leer werden, während sich auf A und A' nichts ändert. Wir wollen daher eine solche Zugfolge, auf die zuerst Hermary aufmerksam machte[1]), mit

1) Siehe Lucas, „Récréations", t. I, p. 114.

einem besonderen Namen — „Tripel-Zug“ („coup triple“) — belegen und auch die besondere abgekürzte Schreibweise (B, C, D) für sie einführen, da eben nur die Felder B, C, D durch sie eine Änderung erfahren. So enthält z. B. die Aufgabe VI des § 2, S. 191, sechs solcher Tripelzüge, nämlich

1) $\frac{56}{54}; \frac{75}{55}; \frac{54}{56}$ 2) $\frac{43}{63}; \frac{51}{53}; \frac{63}{43}$ 3) $\frac{33}{53}; \frac{41}{43}; \frac{53}{33}$ 4) $\frac{23}{43}; \frac{31}{33}; \frac{43}{23}$

5) $\frac{34}{32}; \frac{13}{33}; \frac{32}{34}$ 6) $\frac{56}{36}; \frac{44}{46}; \frac{36}{56}$.

Wir führen weiter — als ein Beispiel für eine ausschließlich durch Tripelzüge lösbare Aufgabe — die folgende an[1]): Auf einem im nächsten Paragraphen näher zu betrachtenden Brett von 37 Feldern (Fig. 15) sind 25 besetzt, dagegen die 12 in der Figur mit eingeklammerten Platznummern bezeichneten leer; alle Felder bis auf das Mittelfeld 44 sollen geleert werden.

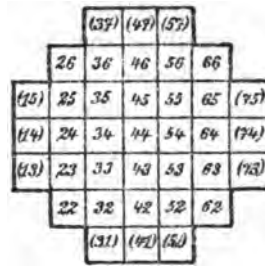


Fig. 15.

— Die anzuwendenden Tripelzüge sind alsdann folgende: (24, 25, 26); (34, 35, 36); (46, 56, 66); (45, 55, 65); (64, 63, 62); (54, 53, 52); (42, 32, 22); (43, 33, 23).

§ 7. Das Solitärspiel mit 37 Löchern.

Wir wenden uns zur Betrachtung der in Frankreich üblichen Form unseres Spiels, nämlich dem soeben schon eingeführten Brett der 37 Felder, und suchen zunächst, wie in § 5 für die 33 Felder, auf grund der erweiterten Spielregel des § 4 gewisse Unmöglichkeiten festzustellen. Denken wir uns alle 37 Felder besetzt, so können wir bei Zugrundelegung der erweiterten Spielregel nach Satz II (§ 4, S. 196) zunächst die 4 Reihen von je 3 aufeinanderfolgenden, in Fig. 15 eingeklammerten Feldern leeren, so daß nur noch das Quadrat der 25 Felder übrig bleibt. Dies läßt sich dann aber, wie wir soeben (§ 6)

1) Siehe Lucas, l. c. t. I, p. 116.

gesehen haben, sogar auf grund der gewöhnlichen Spielregel bis auf das Mittelfeld leeren, und wir haben also als reduzierte Stellung des vollbesetzten Brettes das Mittelfeld. Nun ist aber die Anfangsstellung für die „Hauptaufgabe" unseres Spiels nicht das vollbesetzte Brett, sondern das mit einem leeren Feld. Statt eines leeren Feldes können wir uns aber nach Satz I (S. 196) auch ebensogut 2 Pflöcke in dem betreffenden Loch denken und den zweiten überzähligen dann eventuell nach Satz III (S. 197) in das entsprechende ihm kongruente Loch des inneren Quadrats der 9 Felder bringen, so daß also die reduzierte Stellung der Anfangsstellung die ist, daß auf dem Mittelfeld ein Pflock steht und außerdem noch einer auf einem der 9 Felder des inneren Quadrats. Befindet sich der zweite Pflock auch auf dem Mittelfeld, so ist die reduzierte Stellung von der ersten Klasse (s. S. 201), also die Aufgabe nach Theorem II (§ 4, S. 202) jedenfalls nicht lösbar, da die Schlußstellung mit nur einem Pflock stets von der zweiten Klasse ist. Aus demselben Grunde ist die Hauptaufgabe also auch dann unlösbar, wenn der zweite Pflock in den Löchern 33, 35, 53, 55 sich befindet, die reduzierte Stellung der Anfangsstellung also von der dritten oder vierten Klasse ist. Für alle anderen, diesen ausgeschlossenen Feldern nicht kongruenten Felder als Anfangsfelder bleibt die Lösbarkeit dagegen zunächst noch dahingestellt; es sind dies die in Fig. 16 mit einem Kreuz gezeichneten Felder. Die 16 so noch verbleibenden Anfangsfelder reduzieren sich aus Gründen der Symmetrie auf 3 wesentlich verschiedene Gruppen und als deren Repräsentanten wollen wir — aus später erkennbaren Gründen der Bequemlichkeit — die Felder 13; 42; 45 wählen. Für das erste dieser 3 als Anfangsfeld erhält man die Lösung: $\frac{33}{13}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{13}{33}$; (53, 52, 51); $\frac{73}{53}$; $\frac{45}{43}$; (35, 36, 37); $\frac{15}{35}$; (55, 56, 57); $\frac{75}{55}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{24}{44}$; $\frac{22}{24}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{41}{43}$;

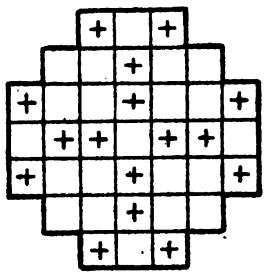


Fig. 16.

$\frac{54}{56}$; $\frac{74}{54}$; (46, 56, 66); $\frac{34}{36}$; $\frac{26}{46}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{62}{64}$; $\frac{47}{45}$; (44, 54, 64). Der letzte Tripelzug lautet ausführlich: $\frac{45}{43}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{43}{45}$, so daß 45 das Schlußloch ist. Wir bekommen leicht ein zweites Schlußloch, indem wir den letzten Zug ersetzen durch $\frac{44}{42}$. Wir haben damit Lösungen gefunden mit 45 und 42 als Schlußlöchern und erhalten durch Bildung der reziproken hieraus zugleich die Lösungen für jene als Anfangslöcher. Wir haben also jetzt Lösungen gerade mit unseren 3 „Repräsentanten" als Anfangslöchern und damit ist also gezeigt, *daß die in Fig. 16 mit Kreuzen versehenen 16 Felder als Anfangslöcher möglich sind, d. h. daß, wenn eins dieser 16 Felder Anfangsloch ist, die Hauptaufgabe des Spiels, für die jedoch über das Schlußloch keine Vorschrift gegeben sein soll, jedenfalls eine Lösung besitzt. Mit einem der anderen 21 Löcher als Anfangsloch ist dagegen die Hauptaufgabe unter keinen Umständen lösbar.*

Entsprechend den speziellen Aufgaben, die in § 2 für das deutsche Spielbrett gegeben wurden, mag auch für das französische wenigstens ein Paar solcher[1]) hier noch Platz finden, bei denen die Herstellung einer bestimmten Figur gefordert wird. Als erste Aufgabe sollen bei vollbesetztem Brett mit leerem Mittelfeld die Pflöcke der Spielregel gemäß so weit entfernt werden, daß die in Fig. 17 durch die Schraffierung angegebene Figur des Buchstabens *E* übrig bleibt. Als Lösung ergibt sich die folgende:

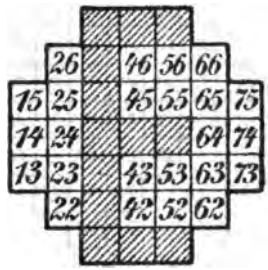


Fig. 17.

$\frac{42}{44}$; $\frac{62}{42}$; (53, 63, 73); (42, 32, 22); $\frac{34}{32}$; $\frac{54}{34}$; (55, 65, 75); $\frac{74}{54}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{26}{46}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{15}{35}$; (46, 56, 66).

1) Busschop, l. c. p. 20 und 65.

Als zweites Beispiel soll behandelt werden die Aufgabe, bei vollbesetztem Brett und leerem Mittelfeld alle Pflöcke bis auf die in Fig. 18 schraffierten Felder zu entfernen. Lösung:

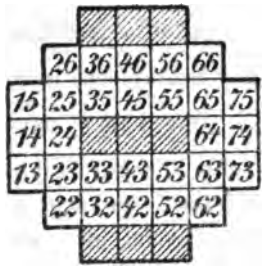


Fig. 18.

$\frac{42}{44}$; $\frac{22}{42}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{54}{34}$; $\frac{56}{54}$; $\frac{36}{56}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{32}{34}$; (42, 52, 62); (53, 63, 73); $\frac{15}{35}$; $\frac{26}{46}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{66}{46}$; $\frac{54}{56}$; $\frac{74}{54}$; (56, 46, 36).

§ 8. Das Solitärspiel mit 41 Löchern.

Schließlich wenden wir uns noch zu dem Fall eines Brettes mit 41 Löchern (s. Fig. 19). Bedenken wir, daß für das vollbesetzte Brett von 37 Löchern als reduzierte Stellung sich ein einziger Pflock auf dem Mittelfeld ergab (§ 7, S. 206), so finden wir für unseren jetzigen Fall die reduzierte Stellung leicht, indem wir die Pflöcke der 4 neu hinzugekommenen Felder auf die ihnen kongruenten Felder 34; 43; 45; 54 und dann den von 43 auf 45, den von 54 auf 34 setzen, worauf nach Anwendung von Satz I (§ 4, S. 196) offenbar auf dem ganzen Brett nur ein Pflock auf 44 übrig bleibt, so daß sich also hier bei 41 Löchern für das vollbesetzte Brett dieselbe reduzierte Stellung ergibt wie in § 7 bei 37 Löchern. Die dort für die „Hauptaufgabe" nachgewiesenen Unmöglichkeiten gelten also jedenfalls auch hier, und es verbleiben für das Anfangsloch also höchstens die dort übrig gebliebenen 16 Felder und die jetzt neu hinzugetretenen Felder 04; 48; 84; 40, da die den letzteren kongruenten Felder in dem

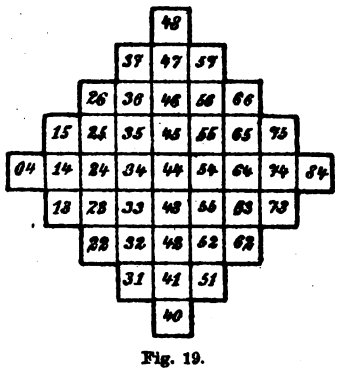


Fig. 19.

inneren Quadrat der 9 Felder gleichfalls in § 7 noch nicht ausgeschieden sind.

Um nun zu entscheiden, ob die so verbliebenen 16 Felder als Anfangslöcher tatsächlich möglich sind, verlassen wir den Boden der Reiß-Hermaryschen Theorie und stellen uns wieder auf den unserer gewöhnlichen Spielregel (§ 1). Dabei denken wir uns, einem Raisonnement von Mantel[1]) folgend, das Brett schachbrettartig in zwei Farben, weiß und schwarz, ausgeführt und zwar das Mittelfeld etwa schwarz. Sämtliche 16 Randfelder werden dann ebenfalls schwarz. Die Zahl aller schwarzen Felder ist 25, die aller weißen 16. Man erkennt nun leicht folgendes:

1) Ein Pflock kann im Laufe des Spiels niemals von einem schwarzen Feld auf ein weißes kommen und umgekehrt; wir unterscheiden daher kurz „weiße" und „schwarze" Pflöcke.

2) Die Pflöcke der Randfelder können nur so vom Brett entfernt werden, daß sie zuvor die Randfelder verlassen; dies ist aber nur so möglich, daß jedesmal ein anderer und zwar ein weißer Pflock geschlagen wird.

Hiernach wird offenbar die Aufgabe der weißen Pflöcke auf der einen Seite darin bestehen, die inneren schwarzen Pflöcke abzuschlagen, und auf der anderen darin, sich selbst einzeln den schwarzen Pflöcken der Randfelder als Opfer anzubieten, damit diese die Randfelder verlassen und dann gleichfalls von einem der (noch nicht geopferten) weißen Pflöcke geschlagen werden können. Hieraus folgt aber, daß das Anfangsloch jedenfalls ein weißes nicht sein kann; denn dann könnten nur 15 der schwarzen Randpflöcke ihre Randfelder verlassen, es blieben also mindestens 2 Pflöcke übrig, nämlich der durch Abschlagen des letzten weißen Pflocks von seinem Randfeld heruntergekommene schwarze und der auf seinem Randfeld verbleibende 16. schwarze Pflock. Damit scheiden aber auch von denjenigen Feldern, die auf einem Brett von 37 Feldern noch als Anfangslöcher auftreten

1) Briefl. Mitteilung an Lucas; s. dessen „Récréat. mathém.", t. I, p. 238, Note V.

konnten, hier die Felder 34; 43; 45; 54 für das Anfangsloch aus. Aber auch die neu hinzugetretenen Felder sind als Anfangslöcher unmöglich; denn nach dem ersten Zuge würden wir, falls ein solches Feld Anfangsloch wäre, wieder 16 schwarze Randpflöcke und nur noch 15 weiße Pflöcke haben.[1])

Es bleiben somit nur noch allenfalls brauchbar als Anfangsloch 12 Löcher, die jedoch nur zwei wesentlich verschiedene Arten darstellen. Als Repräsentanten dieser zwei Arten dürfen wir ansehen 13 und 42. Diese können nun wirklich als Anfangslöcher auftreten, wie folgende von Mantel herrührende Lösung und die zu ihr reziproke zeigen: $\frac{15}{13}$; $\frac{34}{14}$; $\frac{04}{24}$; $\frac{54}{34}$; (24, 25, 26); (35, 36, 37); (46, 47, 48); $\frac{74}{54}$; $\frac{66}{64}$; $\frac{45}{65}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{63}{65}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{62}{64}$; $\frac{54}{74}$; $\frac{84}{64}$; (55, 56, 57); $\frac{65}{63}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{22}{42}$; $\frac{43}{41}$; $\frac{40}{42}$.[2]) Als Resultat erhalten wir somit:

Bei einem Spiel mit 41 Löchern ist die Hauptaufgabe des Spiels (ohne Vorschrift des Schlußlochcs) dann und nur dann

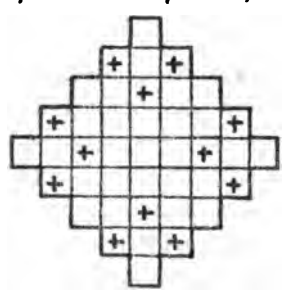


Fig. 20.

lösbar, wenn das Anfangsloch eins der in Fig. 20 mit Kreusen bezeichneten Löcher ist.

1) Es können also höchstens solche Randfelder als Anfangslöcher in Betracht kommen, in die man mit dem ersten Zuge einen Randpflock stecken kann; dies sind die in Fig. 20 mit Kreuzen gezeichneten 8 Randfelder.

2) Andere Lösungen von Hermary, Chicandard und Paul Redon s. bei Lucas l. c., t. I, p. 117/8 (46 Anfangs- und 42 Schlußloch), p. 232 (37 Anfangs- und 37 oder 64 Schlußloch), p. 234/5 (51 Anfangs-, 31 Schlußloch; etc.).

Kapitel IX.

Das Achtköniginnenproblem.

Ein guter Mathematiker ist ein guter Schachspieler.
JEAN PAUL.
„Die unsichtbare Loge". Erster Sektor.

Die Schachspieler sind gemütliche Leute, sie treiben keine Politik. BISMARCK.

Wenn auf dem Schachbrett Bauern zu Wesiren) werden,*
So sind dafür Wesire Bauern hier auf Erden.
Aus einem Gedicht des Muhammed ibn Scherph, übers. v. Hammer-Purgstall.

§ 1. Historische Einleitung.

In der „Illustrirten Zeitung" vom 1. Juni 1850 (Nr. 361, 14. Bd., p. 352) findet sich unter der Rubrik „Schach" „Eine in das Gebiet der Mathematik fallende Aufgabe von Herrn Dr. Nauck in Schleusingen" folgenden Inhalts: „Man kann 8 Schachfiguren, von denen jede den Rang einer Königin hat, auf dem Brett so aufstellen, daß keine von einer anderen geschlagen werden kann."[1]) In der Nummer vom 21. September

*) „Wesir" für unser „Königin". Ich entnehme dies Wort aus A. v. d. Linde, „Geschichte u. Litteratur des Schachspiels", II, p. 257.

1) Irrtümlicherweise wird diese Stelle zumeist als das erste Vorkommen unseres Problems zitiert. Die Aufgabe ist jedoch bereits in der Schachzeitung, herausgegeben von der Berliner Schachgesellschaft, Bd. III, 1848, p. 368 von einem ungenannten „Schachfreund" gestellt worden, und zwar war, wie Max Lange („Handbuch der Schachaufgaben", Leipzig 1862, p. 30, Anm. 6) „nach einer directen persönlichen Mittheilung" angibt, dieser „Schachfreund" Max Bezzel in Ansbach. — Wenn wir trotzdem oben die Geschichte des Problems an jene Nauckschе Behandlung anknüpfen, so bestimmt uns hierbei der Umstand, daß die Fragestellung in der „Schachzeitung" zunächst nur 2 spezielle Lösungen (s. Schachzeitung IV, 1849, p. 40) gezeitigt und anscheinend überhaupt kein sonderliches Interesse für unser Problem

desselben Jahres (15. Bd., p. 182, Nr. 377) gibt dann Nauck *die 92 Lösungen* der Aufgabe, nachdem er diese Zahl anfänglich (ebendort, Nummer vom 1. Juni 1850, 14. Bd., p. 352) auf 60 angegeben hatte. Die Leser der Zeitung brachten der Aufgabe großes Interesse entgegen und von vielen Seiten gingen Lösungen ein; die vollständige Reihe aller 92 Lösungen gab jedoch nur ein Leser, ein Blindgeborener (s. ebendort,

---

zu erregen vermocht hat, so daß jenes Blatt seine Leser noch 1854 mit höchst unvollständigen und mangelhaften Angaben über die Lösungen abspeisen durfte (s. Schachzeitung IX, 1854, p. 446), während dagegen in der „Illustrirten Zeitung" nicht nur alle 92 Lösungen zuerst richtig angegeben wurden, sondern auch von dort, wie oben dargestellt, fruchtbare Anregung ausging. — Die Aufgabe ist ohne Rücksicht und anscheinend ohne Kenntnis der anderswo bereits gegebenen Lösungen nicht nur in Unterhaltungsblättern als Preisaufgabe, sondern auch in wissenschaftlichen Zeitschriften zu den verschiedensten Malen wieder gestellt; wir zitieren aus einer größeren Zahl eins der ersten und eins der letzten Vorkommnisse: 1) Nouv. ann. de mathém. XI, 1852, p. 114, Question 251, übrigens nochmals (von demselben Fragesteller Lionnet) ibidem, 2ième série, VIII, 1869, p. 560, Question 963 (vgl. hier S. 226, Anm. und S. 244, Anm. 2); 2) Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times, New Series, III, 1903, p. 30—32, Question 15021. — Ein unter dem Namen „Der Schatz zu Medinet" herausgegebenes und durch Gebrauchsmuster-Rolle Nr. 4342 für Hermann Hampe-Berlin geschütztes kleines Spiel beruht gleichfalls auf dem Prinzip unserer Aufgabe. — Nach dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" 21, 1889, p. 201/2 lag auch einem unter Nr. 914 gesetzlich geschützten und am 16. Juli 1889 zum Patent angemeldeten „Achterspiel" nichts anderes als die gewöhnliche Form des Achtköniginnenproblems zugrunde. Nach den dort gemachten Angaben des Referenten (H. Schubert) bestand das Spiel aus einem Blatt Papier mit 8×8 Feldern und 8 Spielmarken (mit Angabe von 3 Lösungen). Über die Art des ad Nr. 914 erteilten Schutzes war auch mit Hilfe des Kaiserlichen Patentamtes eine Feststellung nicht möglich, da die Gebrauchsmuster- und Warenzeichenangelegenheiten erst seit den Jahren 1891 resp. 1894 zum Geschäftsbereiche des Patentamtes gehören, andererseits aber die Patentanmeldung zu einer Patenterteilung nicht geführt hat und aus derartigen Akten grundsätzlich nichts mitgeteilt werden darf (Schreiben des Präsidenten des Kaiserlichen Patentamtes vom 25. Febr. 1909). Die Inhaberin des Schutzrechtes, die Spielwarenfabrik J. L. Meyer in Nürnberg-Schweinau, existiert nicht mehr.

Nr. 378 vom 28. Sept. 1850, 15. Bd., p. 207). Auch der große Mathematiker Gauß hatte die Aufgabe in der „Illustrirten Zeitung" gelesen; in seinem Briefwechsel mit seinem Schüler und Freund, dem Astronomen H. C. Schumacher[1]), einem eifrigen Schachspieler, ist in mehreren Briefen die Rede von dieser Aufgabe, der beide Gelehrten anscheinend großes Interesse entgegenbrachten. Gauß fand sehr bald 72 Lösungen, ohne „jedoch verbürgen zu können, daß weiter keine möglich sind"[2]); die vollständige Angabe aller Lösungen rührt aber nicht von Gauß her, wie fast stets irrtümlich behauptet wird, sondern, wie gesagt, von Nauck[3]), wenn auch der große Mathematiker selbstverständlich sofort erkannt hatte, wie man „durch ein methodisches Tatonniren sich die Gewißheit (ob jene von Nauck angegebenen Lösungen alle seien) verschaffen kann, wenn man ein oder ein Paar Stunden daran wenden will."[4])

§ 2. Die Aufgabe auf dem Brett von 16 Feldern.

Nach diesen historischen Vorbemerkungen wenden wir uns zur Sache selbst und wollen uns zunächst etwas näher mit der Materie vertraut machen, indem wir einerseits die Aufgabe allgemeiner fassen, nämlich so: „**n Königinnen auf einem quadratischen Brett von n^2 Feldern so aufzustellen, daß keine eine andere schlägt**", andererseits die Verhältnisse zuerst an den einfachsten Spezialfällen studieren. Die Gangart der Königin oder „Dame", wie man in Deutschland ebenso häufig sagt, besteht bekanntlich darin, daß diese sowohl beliebig in horizontaler, wie vertikaler Richtung (Gangart des Turms), als auch beliebig in schräger Richtung, d. h. parallel zu einer der beiden Diagonalen des

1) Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher, herausgeg. von Peters, Bd. VI, Altona 1865, p. 106, 110, 112—115, 117 bis 121.

2) L. c. p. 112: Brief vom 12. Sept. 1850.

3) Siehe a. Gauß' Brief vom 27. Sept. 1850, l. c. p. 118.

4) L. c. p. 119: Brief v. 27. Sept. 1850.

quadratischen Bretts (Gangart der Läufer), zieht. — Man erkennt nun sofort, daß *für $n = 2$ und $n = 3$ überhaupt keine Lösungen möglich sind.* Für $n = 4$ findet man leicht eine, so die in Fig. 1 angegebene, Lösung, wo die Königinnen durch Kreuze dargestellt sind.

Um nun aber alle Lösungen dieses Falles zu haben, wollen wir in Gaußscher Weise „methodisch tatonnieren“: Zunächst sieht man sofort, daß in jeder Kolonne (Vertikalreihe) je eine Königin stehen muß, desgleichen in jeder Zeile (Horizontalreihe), — eine Bemerkung, die übrigens offenbar auch für jedes andere quadratische Brett gilt. Wir dürfen in unserem Falle also jedenfalls annehmen, daß eine Königin auf einem der Felder $a1$, $b1$, $c1$, $d1$ steht.[1]) Setzen wir sie zunächst auf $a1$ und

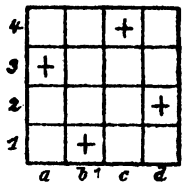


Fig. 1.

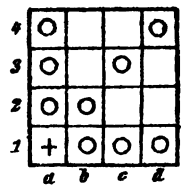


Fig. 2.

bezeichnen alle von ihr beherrschten und damit für unsere Aufgabe ausscheidenden Felder durch kleine Kreise, so erhalten wir das Bild der Fig. 2. Für die in die zweite Zeile zu setzende Königin bleibt uns daher nur noch die Wahl zwischen den Feldern $c2$ und $d2$. Wählen wir $c2$, so erhalten die Felder $b3$ und $d3$ auch einen Kreis, und die dritte Zeile scheidet damit überhaupt aus, so daß also diese Annahme ausgeschlossen ist. Wählen wir aber $d2$, so verbleibt von der dritten Zeile nur noch $b3$ als einziges Feld, und die dritte Königin würde von hier aus die beiden in Fig. 2 noch freien Felder der vierten Zeile auch beherrschen, so daß also auch dieser Fall unmöglich ist. Eine Lösung mit einer Königin auf $a1$ existiert also nicht. Setzen wir die erste Königin nun

1) Wegen der Notation der Felder s. Kap. VII, S. 172.

auf $b1$, so haben wir zunächst das Bild der Fig. 3. In der zweiten Zeile bleibt dann nur noch das Feld $d2$ übrig und hiernach in der dritten nur noch $a3$ und in der vierten $c4$. Das ist dann eine richtige Lösung und zwar die oben (Fig. 1) von uns schon angegebene. — Besitzt man nun eine richtige Lösung, so kann man daraus eine weitere erhalten, indem man die Reihenfolge der Kolonnen umkehrt oder, was auf dasselbe hinauskommt, indem man die Stellung in einem am rechten Rande gedachten Spiegel spiegelt und die erste Stellung durch dieses ihr Spiegelbild auf unverändertem Brett ersetzt. Aus jeder Lösung mit einer Königin auf dem Felde $d1$ würde so eine solche mit $a1$ als einem der besetzten Felder hervorgehen; letztere existiert aber nicht, folglich auch erstere nicht.

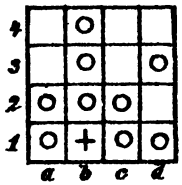


Fig. 3.

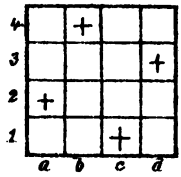


Fig. 4.

Eine Lösung mit einer Königin auf $c1$ kann in dieser Weise nur hervorgehen aus einer, bei der eine Königin auf $b1$ steht und umgekehrt; von letzterer Art gibt es nun gerade eine, also auch eine von ersterer Art, nämlich die in Fig. 4 gegebene.

Für $n = 4$ besitzt unsere Aufgabe also nur 2 Lösungen.

§ 3. Das Brett von 25 Feldern.

Wenn in einer Lösung für ein Brett von n^2 Feldern eine Diagonale ganz frei ist, so erhält man daraus sofort eine Lösung für ein Brett von $(n+1)^2$ Feldern, indem man an einem der Enden der freien Diagonale ein rechtwinklig gebogenes Stück so ansetzt, daß man ein Brett von $(n+1)^2$ Feldern erhält, und indem man nun die $(n+1)$te Königin auf das neu hinzugekommene Eckfeld der bisher freien Diagonale setzt.

Umgekehrt muß man alle Lösungen für ein Brett von $(n+1)^2$ Feldern, in denen ein Eckfeld besetzt ist, aus den Lösungen für ein Brett von n^2 Feldern in dieser Weise erhalten können. So liefern uns die beiden Lösungen des vorigen Paragraphen, in denen sogar beide Diagonalen frei sind, zusammen 8 Lösungen für den Fall $n = 5$, indem wir an jede der vier Ecken in beiden Lösungen ein rechtwinkliges Stück mit einem an der Biegung besetzten Felde ansetzen, und umgekehrt sind diese 8 Lösungen die einzigen Lösungen für $n = 5$, bei denen ein Eckfeld besetzt ist. Von diesen 8 Lösungen gibt Fig. 5 eine.

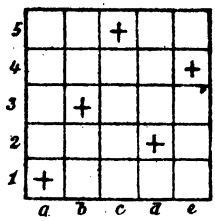


Fig. 5.

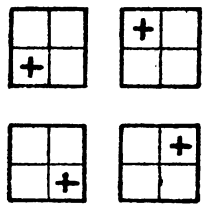


Fig. 6.

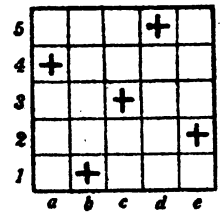


Fig. 7.

Der Umstand, daß beide Diagonalen in den beiden Lösungen für $n = 4$ frei sind, gestattet uns, aus jeder der beiden noch eine weitere Lösung für $n = 5$ herzuleiten, indem wir uns die Figuren 1 und 4 jede in 4 Quadrate geteilt denken, so daß Fig. 1 das in Fig. 6 angegebene Aussehen bekommt, und indem wir nun in die Mitte ein Kreuz mit besetztem Mittelfeld einsetzen und sodann alles zu einer Figur (Fig. 7) zusammenschieben. In gleicher Weise erhält man aus Fig. 4 eine weitere Lösung für $n = 5$, nämlich $a2, b5, c3, d1, e4$ oder, wie wir hinfort stets — unter stillschweigender Voraussetzung alphabetischer Kolonnenfolge — schreiben wollen: 25314.

Wir haben so für $n = 5$ bereits 10 Lösungen gefunden, die wir — in unserer soeben eingeführten Schreibweise — in folgender Reihenfolge schreiben wollen:

1) 13524	5) 42531	9) 41352
2) 52413	6) 31425	10) 25314,
3) 24135	7) 53142	
4) 35241	8) 14253	

wobei 9) und 10) die beiden zuletzt gefundenen (ohne besetztes Eckfeld, jedoch mit besetztem Mittelfeld) sind. Ein methodisches Tatonnement würde uns dahin belehren, daß *mit diesen 10 Lösungen*, die uns übrigens in § 6 (S. 234—239) noch näher beschäftigen werden, *der Fall $n = 5$ bereits erschöpft ist.*

§ 4. Zusammengehörige Lösungen. Das Brett der 36 Felder.

Nachdem in § 2 für $n = 4$ zwei Lösungen hergeleitet wurden, von denen sich die eine aus der anderen durch Umkehrung der Kolonnenfolge resp. durch Spiegelung herleiten ließ, liegt die Frage nahe, ob und wieviele neue Lösungen sich überhaupt aus einer bekannten in ähnlicher Weise herleiten lassen, d. h. durch Operationen, die stets — unabhängig von der speziellen Art der Lösung — anwendbar sind. Als Versuchsobjekt hierfür wollen wir die bereits oben abgebildete Lösung der Fig. 5 benutzen. Denken wir uns, das Brett liege in einem festen Rahmen aus Pappe oder dergleichen, auf welchem die übliche Notation für die Zeilen und Kolonnen verzeichnet ist, während das Brett selbst aus dem Rahmen herausgenommen und bewegt werden kann. Es werde nun zunächst einmal im Sinne der Drehung des Uhrzeigers um 90° gedreht und dann wieder in den Rahmen hineingelegt; unsere Kreuze stellen auch jetzt wieder eine den Bedingungen unserer Aufgabe genügende Konfiguration dar, die aber, da die Felder jetzt anders zu bezeichnen sind[1]), als eine von der früheren Lösung verschiedene anzusehen ist; es ist die Lösung: $a5$, $b2$, $c4$, $d1$, $e3$ resp. in der bereits oben eingeführten abgekürzten Schreibweise: 5 2 4 1 3. Drehen wir das Brett nunmehr in derselben Richtung weiter um 90°, so erhalten wir wieder eine neue Lösung, nämlich: 2 4 1 3 5 und schließlich nach nochmaliger Drehung um 90°: 3 5 2 4 1, worauf bei weiterer Drehung die ursprüngliche Lösung wieder erhalten wird. So ergeben sich also durch sukzessive Drehungen aus

1) Die Platzveränderungen, welche die Felder des gewöhnlichen (64-feldrigen) Schachbretts durch die Drehungen erfahren, stellten wir bereits in Kap. III, S. 50 (Fig. 5) dar.

einer Lösung im allgemeinen 3 weitere. In unserem Spezialfalle insbesondere sind aus der ursprünglich gegebenen Lösung (Fig. 5), die in der Tabelle des vorigen Paragraphen als Nr. 1 verzeichnet ist, sukzessive die Nummern 2, 3, 4 der Tabelle hergeleitet. Aus jeder dieser 4 Lösungen erhält man nun wieder eine weitere durch Spiegelung an dem einen — etwa dem rechten — Brettrande resp. durch Umkehrung der Kolonnenfolge; so ergeben sich aus den Nummern 1, 2, 3, 4 sukzessive die Nummern 5, 6, 7, 8.

Die so erhaltenen 8 Lösungen (Nummern 1—8 unserer Tabelle) bilden ein in sich geschlossenes System in folgendem Sinne: Wären wir nicht von der Lösung Nr. 1 ausgegangen, sondern von irgendeiner der anderen 7, so hätten wir durch die Operationen der Drehungen und Spiegelungen — unter Hinzurechnung der Ausgangslösung — genau dasselbe System der 8 Lösungen erhalten wie jetzt. Überhaupt lassen sich im allgemeinen aus einer Lösung immer 7 weitere herleiten und zwar 3 durch Drehung und aus jeder dieser so entstandenen 4 dann eine weitere durch Spiegelung. Wir wollen die so aus einer gegebenen Lösung hergeleiteten ihre „Derivierten" nennen. Die hier ausgeführten Operationen der Drehung und Spiegelung können wir uns zur Illustration natürlich auch auf irgendeine andere auf einer quadratischen Tafel verzeichnete Konfiguration, z. B. auf das Buchstabenzeichen F, angewandt denken und würden so folgendes System von 8 Bildern erhalten:

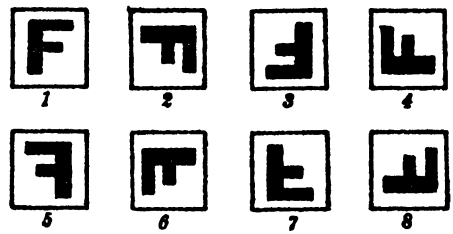


Fig. 8.

Die unteren sind die Spiegelbilder der darüberstehenden in bezug auf den rechten oder linken Brettrand als spiegelnde Fläche.

Arithmetisch lassen sich die Derivierten einer gegebenen Lösung folgendermaßen herleiten: Die Lösung, die sich durch Drehung um 90° im Sinne des Uhrzeigers aus einer bestimmten, sagen wir wieder 13524, ergibt, erhält man, indem man in der ursprünglichen Lösung 13524 von den Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge, also von 1, 2, 3, 4, 5 sukzessive die Platznummern, von rechts ab gerechnet, nimmt: die 1 befindet sich dort — von rechts ab gerechnet — auf Platz 5, die 2 auf Platz 2 usw; man erhält so als neue Lösung 52413. Das durch Drehung um 180° sich ergebende Bild erhalten wir, indem wir die Zahlen der ursprünglichen Lösung alle von 6 (allgemein: von $n + 1$) abziehen und dann die Reihenfolge umkehren; dies ergibt aus 13524 zunächst 53142 und in umgekehrter Reihenfolge also 24135. Das durch Drehung um 270° im Uhrzeigersinne resp. um 90° im umgekehrten Sinne entstehende Bild erhält man, indem man in der ursprünglichen Stellung 13524 sukzessive die Platznummern von 5, 4, 3, 2, 1 und zwar von links ab gerechnet nimmt, was hier 35241 ergibt. Daß man die durch Spiegelung an dem rechten oder linken Brettrand sich ergebenden Lösungen bei unserer schematischen Schreibweise einfach durch Umkehrung der Ziffernfolge erhält, ist bereits oben angegeben.

Mehr als diese 7 Lösungen ergeben sich durch Drehungen und Spiegelungen aber aus einer Lösung nie. Alle diejenigen, die man außerdem durch die angegebenen Operationen noch zu erhalten erwarten möchte, sind bereits darunter enthalten. So bewirkt z. B. eine Spiegelung an dem oberen oder unteren Brettrande — oder, was dasselbe ist, eine Umkehrung der Zeilenreihenfolge resp. anders gesprochen: eine Subtraktion sämtlicher Ziffern unseres Lösungsschemas von $n + 1$ — dasselbe wie eine Drehung um 180°, verbunden mit unserer obigen Spiegelung am rechten resp. linken Brettrande (vgl. a. Fig. 8: Bild *1* geht in *7* über); so ist weiter die Lösung, die man durch Spiegelung an der Diagonale $a1 - e5$ erhalten kann, identisch mit der durch Drehung um 270° und nachherige Spiegelung an einem vertikalen Brettrand erhaltenen (vgl.

a. Fig. 8: Bild *1* und *8*) und die durch Spiegelung an der anderen Diagonale sich ergebende identisch mit der durch Drehung um 90^0 und nachherige Spiegelung (an einem vertikalen Brettrand) resultierenden (Fig. 8: Bild *1* und *6*). Es bedarf nicht des Beweises, daß diese Ausführungen allgemeine Gültigkeit für jedes quadratische Brett besitzen.

Daß es 8 Stellungen sind, die im allgemeinen zusammengehören, ist natürlich nur der Ausfluß des allgemeineren Prinzips, daß jedes reguläre n-Eck $2n$ Drehungen resp. noch allgemeiner: jedes reguläre Polyeder von k Kanten $2k$ Drehungen gestattet, nämlich alle diejenigen, bei denen eine Kante mit irgendeiner anderen zur Deckung gebracht wird. Dabei ist jede Deckung in zweifacher Richtung zu nehmen, ein Moment, das oben durch Einbeziehung von „Spiegelungen" zum Ausdruck gebracht wurde.

Die Operationen, welche uns die derivierten Lösungen liefern, bilden natürlich zusammen mit der identischen Operation eine „Gruppe" von der Ordnung 8.[1]) Bezeichnen wir die Operation der Drehung im Uhrzeigersinne mit R und die Spiegelung an einem vertikalen Brettrand mit S, so besteht unsere Gruppe aus den Elementen:

$$1,\ R,\ R^2,\ R^3$$
$$S,\ RS,\ R^2S,\ R^3S,$$

wo $R^4 = S^2 = 1$, $R^3S = SR^2$, $RS = SR^3$, $R^3S = SR$ ist.

R^3S ist[2]), wie wir schon wissen, gleichbedeutend mit einer Spiegelung an der Diagonale / (d. h. der von unten links nach oben rechts verlaufenden) und RS mit der an der anderen Diagonale, während R^2S äquivalent ist mit einer Spiegelung am oberen oder unteren Brettrand.[3])

---

1) Dieselbe ist eine Gruppe vom „Doppelpyramidentypus" nach einer von H. A. Schwarz und F. Klein herrührenden Bezeichnung (s. Klein, „Elliptische Funktionen und Gleichungen 5. Grades", Math. Ann. XIV, 1879, p. 114) und ist als Untergruppe in der 24-gliedrigen Gruppe des Oktaeders enthalten (vgl. Dyck, „Gruppentheoretische Studien". II, Math. Ann. XXII, 1883, p. 103).

2) Wegen der schwankenden Schreibweise bemerken wir, daß die Operationen von links nach rechts ausgeführt gedacht sind.

3) Bezeichnet man die Kolonnen und Zeilen des gewöhnlichen Schachbretts durch -7, -5, -3, -1, $+1$, $+3$, $+5$, $+7$ und ein Feld der Kolonne a und Zeile b durch $a + bi$, wobei man sich unter i die imaginäre Einheit oder nur ein Symbol zur Scheidung von Zeilen- und Kolonnennotation vorstellen mag, so stellen sich die 8 zusammen-

Die 8 zusammengehörigen Lösungen sind aber nicht immer verschieden, vielmehr können sie sich auf 4 oder 2 verschiedene reduzieren.[1]) Wenn wir nämlich in Fig. 8 das Zeichen F durch ein E ersetzen würden, so würde Bild *5* mit *3*, *6* mit *2*, *7* mit *1*, *8* mit *4* übereinstimmen, die Anzahl der verschiedenen Bilder sich also auf 4 reduzieren. Natürlich findet diese Erscheinung

---

gehörigen Stellungen — bei entprechender Numerierung wie in Fig. 8 — in folgender eleganten Form dar:

1)	$a+bi$	*5)*	$-a+bi$
2)	$b-ai$	*6)*	$-b-ai$
3)	$-a-bi$	*7)*	$+a-bi$
4)	$-b+ai$	*8)*	$+b+ai$

(Gauß, l. c. p. 121, Brief v. 27. Sept. 1850; vgl. a. Gauß, Werke II, p. 102/103).

Diese Darstellung, deren Einfachheit also darauf beruht, daß die in der komplexen Zahlenebene übliche Koordinatendarstellung für die Feldernotation des Schachbretts benutzt wird, gilt natürlich allgemein für die 8 zusammengehörigen Positionen auf einem beliebigen Brett, wenn wir bei geradem $n = 2m$ die Zeilen und Kolonnen mit

$$-(2m-1), -(2m-3), \cdots -3, -1, +1, +3, \cdots +(2m-3), +(2m-1)$$

und bei ungeradem $n = 2m+1$ mit

$$-2m, -(2m-2), \cdots -4, -2, 0, +2, +4, \cdots +(2m-2), +2m$$

bezeichnen. Einer Drehung um 90° im Uhrzeigersinne entspricht bei dieser Darstellung — unter i die imaginäre Einheit verstanden — einfach eine Multiplikation mit $(-i)$ und einer Spiegelung am rechten oder linken Brettrand ein Vorzeichenwechsel des reellen Teils. — Übrigens könnte man auf dem gewöhnlichen Schachbrett die Kolonnen (von links nach rechts) und die Zeilen (von unten nach oben) auch mit $-4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4$ bezeichnen und entsprechend für den allgemeinen Fall, ohne daß dies die elegante Gaußsche Darstellung der 8 zusammengehörigen Lösungen irgendwie alterieren würde. Freilich wären die jetzt angegebenen Zahlen (-4 usw.) — im Gegensatz zu den obigen Gaußschen — reine Unterscheidungszeichen, nicht zugleich Maßzahlen für die Distanzen der Felder; aus diesem Grunde würden wir bei dieser (zuletzt angegebenen) Notation keine so einfachen Kriterien für den Läuferangriff gewinnen wie diejenigen, die wir in § 7 (S. 244) angeben werden. Diese Rücksicht wird für Gauß (vgl. S. 244, Anm. 1) bei Wahl seiner Notation, von der wir weiterhin übrigens keinen Gebrauch mehr machen werden, maßgeblich gewesen sein.

1) Vgl. Gauß, l. c. p. 112/113: Brief v. 12. Sept. 1850.

ihren Grund darin, daß das Zeichen **E** eine horizontale Symmetrieachse besitzt resp. nach Drehung um 90° (Bild *2* von Fig. 8) eine vertikale und daß deshalb bei entsprechenden Spiegelungen die alten Bilder reproduziert werden; genau dasselbe würden wir beispielsweise bei den Zeichen **D, B** oder aber — mit vertikaler Symmetrieachse — bei **A, M, T, U, V, W** finden. Andere Zeichen gehen, wenn auch nicht bei Spiegelungen, wohl aber bei Drehungen in sich über; so reproduzieren sich **N, S, Z** bei einer Drehung um 180°, liefern also durch Drehungen überhaupt nur ein weiteres Bild und dazu durch Spiegelungen dann noch zwei weitere (s. Fig. 9).

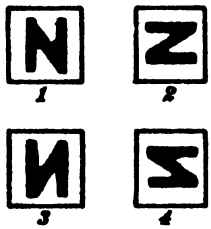


Fig. 9.

In allen diesen Fällen, sei es, daß die Figur eine horizontale oder eine vertikale Symmetrieachse besitzt und daher durch eine entsprechende Spiegelung reproduziert werden kann, sei es, daß sie durch eine Drehung um 180° in sich übergeht, erhalten wir nur je 4 zusammengehörige Bilder im Gegensatz zu den 8 des allgemeinen Falles. Nun sieht man zwar, wenn wir uns wieder zu unserem Königinnenproblem wenden, daß hier durch Spiegelung sich nie eine Lösung reproduzieren kann, da zwei Königinnen, die symmetrisch zur horizontalen oder vertikalen Mittelachse stehen, sich gegenseitig angreifen und damit gegen die Forderung der Aufgabe verstoßen würden. Es folgt[1]) also, daß *die Spiegelungen stets wenigstens eine neue Stellung ergeben müssen.*[2]) Konfigurationen, die hinsichtlich der Symmetrieverhältnisse den Zeichen **E** oder **A** analog wären, sind also für unser Problem von vornherein ausgeschlossen. Wohl aber gibt es solche

1) Auch aus dem arithmetischen Äquivalent der Spiegelung — der Umkehrung der Ziffernfolge unseres Lösungsschemas resp. der Subtraktion aller dieser Ziffern von $n+1$ — ergibt sich sofort die gleiche Folgerung.

2) Dies gilt zunächst nur für die Spiegelungen an einem Brettrand, jedoch folgt ebenso, daß es auch für die Spiegelungen an den Diagonalen gilt.

Lösungen, die den Bildern der Fig. 9 entsprechen, die also bei Drehung um 180° in sich übergehen. Ein Beispiel hierfür bietet uns der bisher noch nicht betrachtete Fall $n = 6$, für den es, wie man sich leicht durch methodisches Tatonnieren überzeugen kann, nur ein System von 4 zusammengehörigen Lösungen gibt. Eine dieser 4 stellt Fig. 10 dar, die nach Drehung um 180° offenbar in sich übergeht; die 3 Derivierten ergeben sich daraus entsprechend der Fig. 9: Durch Drehung um 90° erhält man zunächst: 362514 und dazu dann die Spiegelbilder der beiden bisherigen, nämlich 531642 und 415263. — Während wir die allgemeine Form der Lösung mit je 7 Derivierten als die „unsymmetrische" bezeichnen wollen, sollen diese mit nur je 3 Derivierten „symmetrisch" und zwar im Gegensatz zu anderen weiterhin zu besprechenden Formen von Symmetrie „einfach-symmetrisch" heißen. Folgen ihrer Eigenschaft, nach Drehung um 180° in sich überzugehen, sind, wie insbesondere der mathematische Leser sofort erkennt (vgl. die Gruppe S. 220), die, daß die Spiegelung an einem horizontalen Brettrand dasselbe ergibt wie die an einem vertikalen oder arithmetisch gesprochen: die Umkehrung der Kolonnenfolge dasselbe wie die der Zeilenfolge, sowie ferner, daß die Spiegelung an der einen Diagonale dasselbe ergibt wie die an der anderen.

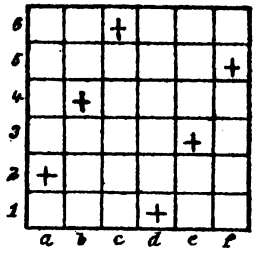


Fig. 10.

Besitzt eine Figur zwei Symmetrieachsen, etwa eine horizontale und eine vertikale, betrachteten wir also im Sinne der Fig. 9 beispielsweise das Zeichen H, so würden die in der Fig. 9 unten gezeichneten Bilder mit den oberen zusammenfallen und wir im ganzen nur 2 zusammengehörige Bilder haben. Diese Reduktion auf 2 Bilder kann auch dadurch herbeigeführt werden, daß die Figur bereits bei Drehung um 90° sich reproduziert, nicht erst, wie das Bild der Fig. 9 und H, nach Umdrehung um 180°. Einen solchen Fall haben wir z. B., wenn wir zwei sich kreuzende Zeichen S so wählen, wie Fig. 11 angibt. Diese Figur reproduziert sich bei allen Drehungen um 90°,

180°, 270° usw., und wir erhalten also neben ihr nur noch ein weiteres Bild und zwar ein Spiegelbild. Wir werden diesen Fall von nur 2 zusammengehörigen Bildern als den der „doppelten Symmetrie“ bezeichnen, und wenn auch für unser Königinnenproblem, wie aus den obigen Ausführungen erhellt, eine dem Zeichen H entsprechende Lösung grundsätzlich ausgeschlossen ist, so kommen doch solche „doppeltsymmetrischen“ Lösungen, deren Symmetrie derjenigen der Fig. 11 analog ist, sehr wohl vor. Die beiden Lösungen des Falles $n = 4$ (§ 2, Figuren 1 und 4), von denen jede das (einzige) Spiegelbild der anderen ist, stellen einen solchen Fall dar; ebenso die beiden daraus hergeleiteten Lösungen mit besetztem Mittelfeld für $n = 5$ (s. S. 216, Fig. 7, sowie die Nrn. 9 und 10 der Tabelle).

Fig. 11.

Gruppentheoretisch kommen diese Symmetrieverhältnisse, soweit sie bei unserem Königinnenproblem auftreten können, natürlich so zum Ausdruck, daß bei einfacher Symmetrie $R^2 = 1$, bei doppelter $R = 1$ ist und die obige achtgliedrige Gruppe sich dadurch reduziert auf die viergliedrige

$$1, \quad R$$
$$S, \quad RS$$

bezw. die zweigliedrige $\begin{matrix} 1 \\ S \end{matrix}$.

Obwohl ein höherer Grad von Symmetrie als der zweifache bei den Lösungen unseres Problems nicht vorkommen kann, so mag doch mit Rücksicht auf spätere Vorkommnisse (Kap. X) bereits hier der Vollständigkeit halber bemerkt werden, daß an sich natürlich auch Figuren auf dem quadratischen Brett vorkommen können, die „dreifach-symmetrisch“ sind und bei allen Drehungen und Spiegelungen in sich übergehen; eine solche Figur bildet z. B. das Diagonalenpaar (s. Fig. 12).

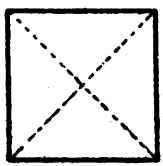


Fig. 12.

§ 5. Die Lösungen für die verschiedenen Werte von n (von $n = 4$ bis $n = 12$).

In diesem Paragraphen geben wir eine Zusammenstellung der Resultate für die bis jetzt überhaupt untersuchten Fälle, wobei wir uns dort, wo wir die Lösungen selbst, nicht bloß deren Zahl, angeben, darauf beschränken, von den im Sinne des § 4 zusammengehörigen immer nur eine, die „Stammlösung“[1]), anzugeben, so zwar, daß die einfach-symmetrischen durch * und die doppelt-symmetrischen durch ** von den nicht weiter gezeichneten unsymmetrischen unterschieden werden.

$n = 4$: 2 Lösungen

2413**.

$n = 5$: 10 Lösungen

1) 13524
2) 25314**.

$n = 6$: 4 Lösungen

246135*.

$n = 7$: 40 Lösungen

1) 1357246
2) 1473625
3) 2417536
4) 2514736*
5) 2574136*
6) 2637415.

$n = 8$: 92 Lösungen[2])

1) 15863724
2) 16837425

---

1) Zur „Stammlösung“ gewählt ist immer diejenige, die an die erste Stelle kommt, wenn man die zusammengehörigen Lösungen, in üblicher schematischer Weise geschrieben, ihren vordersten Ziffern nach anordnet, wobei als Rangordnung die der natürlichen Zahlenreihe gilt. — Nach demselben Grundsatz sind auch wieder die Stammlösungen unter sich geordnet.

2) Außer von Nauck (vgl. § 1), der auch bereits die Zusammengehörigkeit der Lösungen im Sinne von § 4 richtig angegeben hatte,

3) 24683175
4) 25713864
5) 25741863
6) 26174835
7) 26831475
8) 27368514
9) 27581463
10) 35281746*
11) 35841726
12) 36258174.

Um für diesen Fall des gewöhnlichen Schachbretts wenigstens eine Lösung näher anzugeben, fügen wir in Fig. 13 die symmetrische bei, die sich in dieser Form leicht dem Gedächtnis einprägt.

---

sind diese 92 Lösungen später von verschiedenen Autoren — anscheinend ohne Kenntnis der Arbeiten ihrer Vorgänger — publiziert resp. ermittelt; wir zitieren G. Bellavitis, Atti dell' Istituto Veneto (3) VI, 1860/1861, p. 434 (nicht p. 134, wie Bellavitis selbst, ibidem XV, 1869/1870, p. 844 und nach ihm Lucas, „Récréations", I, p. 60 zitiert); Abbé Durand, La nouvelle Régence, II, 1861, p. 197 (dort ist — s. a. p. 181 — jedoch übersehen, daß eine Lösung symmetrisch ist, und demzufolge die Gesamtzahl fälschlich auf 96 angegeben); Jaenisch, „Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs", t. I, 1863, p. 134; Edm. Solvyns, publiziert in der Schrift von A. Cretaine (s. liter. Index, Jahr 1865), p. 41; F. H. Curtiss in Brownsons Chess Journal, Dubuque (Jowa), V, 1873, p. 185; die französischen Offiziere Parmentier und De la Noë (s. Lucas, „Le problème des huit reines", La revue scientifique 1880, p. 948—953); ferner J. Bourget, Nouv. ann. de mathém. (2) XX, 1881, p. 473—480 (infolge der in diesem Blatte gestellten Frage, s. hier S. 212, Anmerkung; s. a. Nouv. ann., 1. Serie, XI, 1852, p. 148 eine Anmerkung des Herausgebers Terquem über die Lösungen von Koralek); schließlich auch A. Pein, „Aufstellung von n Königinnen auf einem Schachbrett von n^2 Feldern derart ..... (von $n = 4$ bis $n = 10$)", Programm Realschule Bochum 1889, p. 35 u. 54. — S. Günther warf im Arch. Math. Phys. 56, 1874, p. 290 die Frage auf, ob zwischen den 92 Lösungen des Achtdamenproblems und den 92 Kegelschnitten, von denen 8 im Raume willkürlich liegende Gerade nach Lüroth (Journ. f. Math., Bd. 68, 1868, p. 185—190) geschnitten werden, ein innerer Zusammenhang bestehe.

Es sei bei diesem wichtigsten Fall des gewöhnlichen Schachbretts gleich noch eine kleine Digression gestattet zur Betrachtung folgender Frage: Wieviele Königinnen können auf dem Schachbrett höchstens aufgestellt werden, wenn jede auf je einer Geraden (Zeile, Kolonne oder diagonalgerichtete Linie) höchstens von einer anderen Königin, nicht von mehreren, angegriffen sein darf? — Als Maximum ergibt sich sofort die Zahl 16. Hätten wir nämlich mehr als 16, so ständen wenigstens in einer Zeile 3 (resp. mehr) Königinnen, die alsdann zwei- oder mehrfach angegriffen wären. Andererseits wird die Zahl 16 aber wirklich erreicht, wie Fig. 14 zeigt.[1])

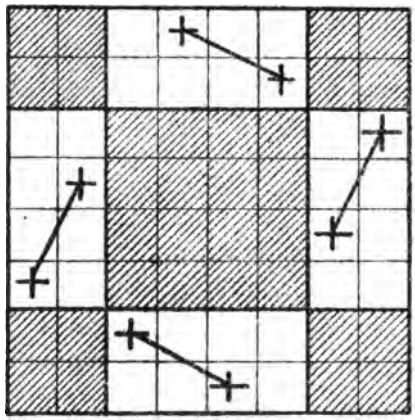


Fig. 13 ($n = 8$).

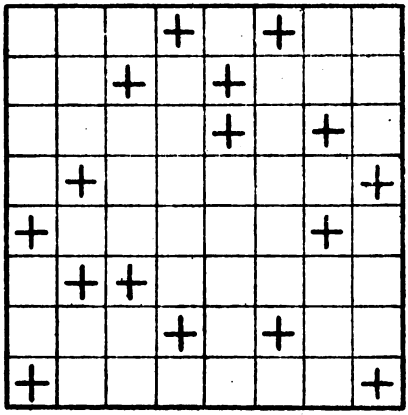


Fig. 14.

1) Wer zuerst diese Frage erhoben hat, ist mir nicht bekannt. Ich wurde auf sie aufmerksam gemacht durch einen Brief des Herrn E B. Escott (Ann Arbor, Mich.) vom 1. April 1909, dem ich zugleich die mitgeteilte Lösung verdanke. — Die wiedergegebene Figur stellt übrigens nicht, wie man zunächst vielleicht denken könnte, eine Juxtaposition zweier Lösungen unseres gewöhnlichen Königinnenproblems dar.

Wir setzen unsere Statistik der Lösungen des Hauptproblems fort und gehen über zu dem Fall

$n = 9$: 352 Lösungen[1]) (46 Stammlösungen)

136824975	248396157	279631485
137285946	249731685	281479635
138692574	249753168*	285396417
146392857	257936418	286931475
146825397	257948136	358296174
147382596	258136974	358297146
147925863	258196374	359247186
148397526	258693147	362951847*
157938246	258693174	368159247*
157942863	259418637	368519724
159642837	261379485	369741825
168374295	261753948*	372859164
174835926	261958473	386192574
174839625	263184975	427918536.
241796358	269358417	
247139685	275194683	

Für $n = 10$ gibt es nach Delannoy[2]) 724 Lösungen (92 Stammlösungen), wobei in den Schemata statt der Zahl 10 überall 0 gesetzt werden mag:

---

1) Die Liste für diesen Fall wurde zuerst von P. H. Schoute in der bereits (S. 53) zitierten und „Wiskundige Verpoozingen" betitelten Artikelserie in der holländischen Zeitschrift „Eigen Haard" 1882, p. 594 und 1883, p. 604 gegeben. Unabhängig davon wurde sie von dem General Parmentier („Le problème des n reines", Congrès de l'association française pour l'avancement des sciences 12, Rouen 1883, p. 212/213) angegeben, ebenso auch 1889 von Pein (l. c. p. 55/56), sowie von K. Rohn, Deutsche Schachzeitung 54, 1899, p. 153 (in der dortigen Tabelle sind die Nrn. 31, 33, 39 zu streichen); vgl. a. Schachzeitung 54, 1899, p. 286 (Mitteilung von Folcker in Haarlem). — Besonders eingehend mit den verschiedenen Konfigurationen der Lösungen des Falles $n = 9$ beschäftigt sich Geo. E. Carpenter in The British Chess Magazine XX, 1900, p. 344—364.

2) Siehe Lucas, „Récréations", t. I, p. 226; s. auch Pein, l. c., Tabellen 11 u. 12, p. 57—60.

1368059247	1683792504	2630859417	3591607248
1369704258	1680493572	2683195047	3592074186
1369704285	1693842057	2683740195	3594108627
1397042586	1693074258	2691853074	3620195847
1469308257	1695084273	2697013584	3640195827
1470295386	1603794258	2603794158	3681470295
1470392586	1796308524	2793804615	3680195247
1470692538	1849730625	2706195384	3680415297
1470825369	1869304752	2839750164	3691470258*
1470835926	2468013579*	2859160374	3691470825
1470852936	2483960175	2803964175	3691057248
1495803627	2480596137	2804159637	3728610594
1497203685	2497501683	2918530746	3827105964
1497036258	2407963185	2938046157	3862051497
1407935286	2571069384	2930741586	3869105724
1570429368	2581703649	2950146837	3801625794
1580372469	2584703169	2961307485	3960271485
1580742963	2586307149	2963041857	4259108637
1506924738	2580369147	2968013574	4280136975
1647039258	2591047386	2973085146	4695013827
1647082539	2594086317	2970415863	4835019627
1649730258	2637019584	3528074196	4852017936
1640793528	2637085149	3570461928	4859102637*

Für $n = 11$ haben Botton und H. Tarry[1]) unabhängig voneinander übereinstimmend 341 Stammlösungen, und zwar 12 einfach-symmetrische und 329 unsymmetrische, im ganzen also 2680 Lösungen gefunden.

1) Siehe Lucas, „Récréations", t. I, Note IV, p. 231 und H. Tarry, Congrès de l'ass. franç. pour l'avanc. des sc. XIX, Limoges 1890, t. I, p. 153; die Lösungen selbst sind von den Genannten nicht publiziert, wohl aber hat T. B. Sprague in den Proceedings of the Edinburgh Mathem. Society XVII, 1898/1899, p. 63—68 das Verzeichnis der 341 Stammlösungen gegeben. Ohne Kenntnis von der Existenz der Spragueschen Arbeit zu haben, hatte Prof. Dr. A. Kopfermann, weil. Direktor bei der Königl. Bibliothek in Berlin, eine Liste der Lösungen dieses Falles aufgestellt und sie dem Verfasser brieflich (23. Febr. 1902)

Für $n = 12$ hat A. Kopfermann als Gesamtzahl der Lösungen 1766 Stammlösungen, darunter 4 doppelt-symmetrische[1]) und 18 einfach-symmetrische, insgesamt also 14032 Lösungen ermittelt[2]).

Für $n = 13$ gibt es bereits 1346 Stammlösungen[3]) mit besetztem Eckfeld und an symmetrischen Lösungen im ganzen 40 Stammlösungen, darunter 3 doppelt-symmetrische.[1]) Die Gesamtzahl der Lösungen ist jedoch für $n = 13$ noch nicht bestimmt und für höhere Werte von n umsoweniger.

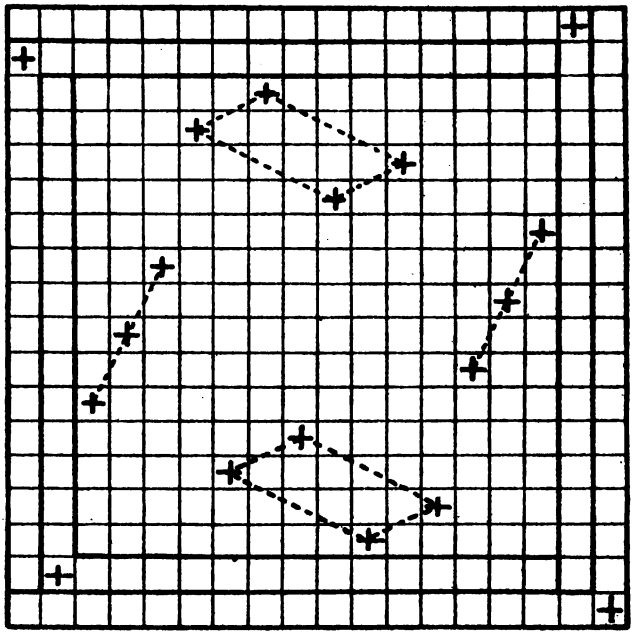


Fig. 15 ($n = 14, 15, 16, 17, 18$).

mitgeteilt; sie stimmt mit der von Sprague vollständig überein. — Eine Lösung dieses Falles mit 10 weiteren durch zyklische Vertauschungen daraus hervorgehenden hatte schon früher G. Bellavitis angegeben (Atti Istituto Veneto (3) XV, 1869/1870, p. 845); s. dazu S. 248 hier nebst Anm. 2 ebenda.

1) Die doppelt-symmetrischen Lösungen für $n = 12, 13$, wie auch die für $n = 16, 17$ siehe in § 8, S. 256/257.

2) Siehe Intermédiaire des mathématiciens, t. XI, 1904, p. 192.

3) Briefliche Mitteilungen von Prof. Kopfermann (20. Mai u. 8. Juni 1902).

Für $n = 14$ geben wir in Fig. 15 noch eine interessante einfach-symmetrische Lösung, die die Besonderheit besitzt, daß aus ihr nach der in § 3 (Anfang) gelehrten Methode durch Ansetzen rechtwinklig gebogener Stücke sukzessive Lösungen für $n = 15, 16, 17, 18$ sich ergeben. Die Figur zeigt die Entstehung dieser Lösungen, die ich gleichfalls dem verst. Prof. Kopfermann verdanke (1902), in nicht mißzuverstehender Weise.

Auf Angabe weiterer spezieller Einzellösungen für höhere Werte von n dürfen wir umsomehr verzichten, als wir in der Lage sind, die Existenz von Lösungen durch Aufstellung gewisser kanonischer Formen für jedes $n > 3$ allgemein zu beweisen; dieser Beweis wird in § 7 gegeben werden. — Wir wollen dagegen diesen statistischen Abschnitt nicht schließen, ohne zuvor noch eine tabellarische Zusammenstellung der Resultate für die bisher erschöpfend untersuchten Fälle (bis $n = 12$ einschl.) zu geben:

n	Stammlösungen				Gesamtzahl aller Lösungen
	doppeltsymmetrische	einfachsymmetrische	unsymmetrische	zusammen	
2				0	0
3				0	0
4	1			1	2
5	1		1	2	10
6		1		1	4
7		2	4	6	40
8		1	11	12	92
9		4	42	46	352
10		3	89	92	724
11		12	329	341	2680
12	4	18	1744	1766	14032

Wir würden auf die Spezialfälle der Bretter von verschiedenem n und auf deren Lösungen nicht so ausführlich eingegangen sein, wie es vorstehend geschah, wenn bereits allgemeinere Untersuchungen über die Frage nach den Anzahlen der Lösungen vorlägen. Man ist jedoch, will man die Gesamtanzahl der Lösungen für einen speziellen Fall von n bestimmen, bisher immer noch darauf angewiesen, diese Lösungen selbst alle zu bestimmen, ein Verfahren, das für größere Werte von n sehr langwierig wird[1]). Ein anderes Verfahren, zur Bestimmung der Anzahl der Lösungen, unabhängig von diesen selbst, geschweige denn eine allgemeine Formel für diese Anzahl, gültig für jeden Wert von n, existiert bisher nicht[2]). Einen ersten Anlauf in dieser Richtung unternahm der dänische Mathematiker und Lebensversicherungsanstaltsdirektor S. Hertzsprung, indem er diese Frage für eine fingierte Figur mit einfacherer Gangart als derjenigen der Königin löste.[3]) Während nämlich die Gangart der Königin eine Komposition aus den Gangarten von Turm und Läufer darstellt, dachte sich Hertzsprung eine Figur, welche die Gangart des Turms mit der des Königs vereint, welche also von ihrem Felde alle an dieses angrenzenden Felder und ferner alle Felder ihrer Zeile und ihrer Kolonne beherrscht. Für diese Phantasie-Figur stellte Hertzsprung das entsprechende Problem auf, d. h. Aufstellung von n dieser Figuren auf n^2 Feldern ohne jeden gegenseitigen Angriff, und deduzierte für dieses

1) Vgl. § 7, S. 242.

2) Für die Anzahl der Möglichkeiten einer Aufstellung von 2 und 3 Königinnen auf beliebigem quadratischem Brett ohne gegenseitigen Angriff s. die Formeln im „Anhang" dieses Kapitels, S. 276/277.

3) S. Hertzsprung, „En kombinationsopgave", Tidsskrift for Mathematik (5) V, 1887, p. 13—17. Siehe auch die ältere, im literarischen Index aufgeführte Arbeit desselben Verfassers, in der die Anzahl der Glieder einer Determinante, die kein Element der einen Diagonale enthalten, oder, was dasselbe ist, die Anzahl der Aufstellungen von n Türmen auf n^2 Feldern bei Verbot gegenseitigen Angriffs unter den Türmen und unter Ausschluß aller Felder der einen Diagonale bestimmt wird.

Problem eine freilich noch recht beschwerliche[1]) allgemeine Formel für die Anzahl seiner Lösungen. Es soll hier nicht näher auf diese Untersuchung eingegangen werden; nur eine kurze Gegenüberstellung der Resultate für kleine Werte von n mit denen unseres Problems sei hier gegeben:

	Gesamtanzahl der Lösungen für das	
	Königinnen-problem	Hertzsprung-sche Problem
$n = 1$	1	1
$n = 2$	0	0
$n = 3$	0	0
$n = 4$	2	2
$n = 5$	10	14
$n = 6$	4	90
$n = 7$	40	646
$n = 8$	92	5242

Bis $n = 4$ einschließlich sind auch die Lösungen selbst, nicht nur deren Anzahlen, für beide Probleme dieselben; während aber von da ab die Zahl der Lösungen für das Hertzsprungsche Problem mit wachsendem n offenbar beständig wächst, zeigt das Königinnenproblem für $n = 6$ wieder dies merkwürdige Fallen des Wertes.

§ 6. Das Auftreten der verschiedenen Felder und Farben in den Lösungen.

Bezüglich der Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Felder in den Lösungen wollen wir zunächst bemerken, daß in jedem der beiden Fälle $n = 4$ und $n = 6$ jedes Feld in

1) Vgl. a. Hertzsprung selbst, l. c. p. 17.

allen Lösungen des betreffenden Falles zusammengenommen gerade einmal vorkommt mit Ausnahme der in beiden Fällen gar nicht dabei vorkommenden Felder der beiden Diagonalen[1]). In den übrigen Fällen, für die wir oben die Lösungen angegeben haben, kommt allerdings jedes Feld in den Lösungen vor, jedoch in den Fällen $n = 7, 8, 9, 10$ ungleich häufig, jedes aber bezw. mindestens 4-, 4-, 20-, 44-mal[2]). Die am wenigsten oft vorkommenden Felder sind vorwiegend auf den Diagonalen und in nächster Nachbarschaft der Brettmitte zu suchen.

Eine merkwürdige Sonderstellung nimmt der Fall $n = 5$ ein, indem jedes Feld gleich oft, nämlich je zweimal, in den Lösungen auftritt. Die 10 Lösungen, die wir für diesen Fall erhalten hatten, lassen sich in 2 Klassen so anordnen, daß jede Klasse alle Felder des Bretts je einmal aufweist; nachstehende Zusammenstellung, bei der die doppelt-symmetrischen Lösungen den Mittelplatz in jeder Klasse erhalten haben, erfüllt diese Forderung:

A.	*B.*
I) 52413	*VI)* 14253
II) 24135	*VII)* 42531
III) 41352	*VIII)* 25314
IV) 13524	*IX)* 53142
V) 35241	*X)* 31425.

Daß diese Anordnung in der Tat das Geforderte leistet, erhellt sofort: in jeder Kolonne von *A* sowohl wie von *B* kommt jede der 5 Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 gerade einmal vor. Eine noch anschaulichere Vorstellung dieser Verhältnisse erhalten wir, wenn wir alle Felder des 25-feldrigen Brettes, die bei der Lösung *I* besetzt sind, mit *I* zeichnen und so entsprechend

---

1) Daß alle Diagonalfelder in diesen beiden Fällen ($n = 4, 6$) ausgeschlossen sein müssen, folgt von vornherein daraus, daß diese beiden Fälle nur symmetrische Lösungen besitzen (vgl. S. 256, Zeile 4—7).

2) Pein, l. c. p. 39—42.

auch für die Lösungen *II, III, ... X*. Fig. 16, deren linkes Quadrat der Klasse *A*, deren rechtes *B* entspricht, zeigt uns alsdann, daß jedes Feld des Brettes durch die 5 Lösungen von *A* einmal und ebenso durch die von *B* besetzt wird[1]). Wenn wir uns also alle mit *I* gezeichneten Felder mit weißen, alle Felder *II* mit schwarzen, alle *III* mit blauen usw. Königinnen besetzt denken, so wären auf dem vollbesetzten Brett 25 Königinnen von fünf verschiedenen Farben, von jeder Farbe fünf, so aufgestellt, daß nie zwei Königinnen derselben Farbe

I	V	IV	III	II
III	II	I	V	IV
V	IV	III	II	I
II	I	V	IV	III
IV	III	II	I	V

IX	VIII	VII	VI	X
VII	VI	X	IX	VIII
X	IX	VIII	VII	VI
VIII	VII	VI	X	IX
VI	X	IX	VIII	VII

Fig. 16.

sich gegenseitig angreifen. Die rechte Hälfte der Fig. 16 gibt uns eine zweite Möglichkeit einer solchen Aufstellung der 25 Königinnen; freilich ist sie nur das Spiegelbild der linken indem *I* und *X*, *II* und *IX*, *III* und *VIII*, *IV* und *VII*, *V* und *VI* sich wie Gegenstand und Spiegelbild entsprechen[2]).

---

1) Die Quadrate der Fig. 16 — und ebenso das der Fig. 18 — sind pandiagonale lateinische Quadrate nach der Terminologie von Kap. XIII (Bd. II).

2) Denkt man sich die Zahlen *VI, VII, .. X* des zweiten Quadrats der Fig. 16 der Reihe nach etwa durch 1, 2, .. 5 ersetzt und alsdann die beiden Quadrate der Fig. 16 aufeinandergelegt, so stellt das so entstandene Quadrat natürlich auch eine Aufstellung von 25 Königinnen, von denen immer je 5 von gleicher Farbe sind, dar, jetzt jedoch so, daß die gleichfarbigen unter sich wieder durch Nummern (1 ... 5) unterschieden sind. Die Aufstellung ist dann eine solche, daß erstens, wie zuvor, nie zwei Königinnen gleicher Farbe sich angreifen, zweitens aber auch nie zwei verschiedenfarbige Königinnen gleicher Nummer. Die Herstellung einer solchen Anordnung bildet den Gegenstand eines von John Elliott in Scranton (Pennsylvania) angegebenen Spiels, das durch Patent der Vereinigten Staaten (Nr. 702188 vom 10. Juni 1902) geschützt ist. Die

Wir können jedoch noch mehr sagen. Die Besonderheit unserer 10 Lösungen für $n = 5$ gestattet uns nämlich, sie, wie bereits geschehen, in den Klassen A und B so anzuordnen, daß die Lösungen jeder Klasse auseinander durch zyklische Vertauschungen der Ziffern hervorgehen: Setzen wir die erste Zahl (5) von I hinter die Reihe, so erhalten wir II, aus II seinerseits in derselben Weise III usw.; dasselbe gilt für B. Die Besonderheit dieser Anordnung findet auch darin ihren Ausdruck, daß die Zahlen von A sowohl wie von B, in jeder einzelnen Kolonne von oben nach unten gelesen, dasselbe ergeben, wie in den einzelnen Zeilen, worauf wir übrigens noch zurückkommen werden, und ferner darin, daß, wenn wir die ganze erste Kolonne von A abtrennen und nach hinten setzen, das neue System A' wieder alle wesentlichen Eigenschaften von A besitzt, indem es aus 5 Lösungen — sogar denselben wie zuvor, nur in zyklisch geänderter Reihenfolge — besteht. Wenn wir uns also die Bretter der Fig. 16 zerlegbar denken, so können wir die erste Kolonne mit ihren 5 Königinnen nach hinten schieben[1]), und auch in der neuen Anordnung greifen sich zwei Königinnen derselben Farbe alsdann nicht an. Ebenso können wir, wie von vornherein klar ist, die oberste Zeile in Fig. 16 abtrennen und unten ansetzen. Wir wollen uns diese besondere Eigentümlichkeit noch klarer veranschaulichen an Fig. 17: in dieser haben wir eine Reihe von Brettern mit

---

dort für $n = 7$ gegebene Lösung stellt ebenso wie die unsere für $n = 5$ übrigens sogar ein „pandiagonales" Eulersches Quadrat (s. Kap. XIII in Bd. II) dar, leistet also mehr als verlangt ist (s. die nächste Anmerkung). Auf den Fall $n = 9$ läßt sich jedoch die angegebene Methode nicht anwenden, wie in der Patentschrift fälschlich angegeben ist (vgl. auch unten S. 239 und S. 247).

1) Dies hängt damit zusammen, daß, wie schon in Anm. 1 der vorigen Seite gesagt ist, die Quadrate der Fig. 16 „pandiagonal" sind. Auch für die in der vorstehenden Anmerkung beschriebene Anordnung der 25 Königinnen von 5 Farben und 5 Nummern und ebenso für die entsprechende der 49 würden solche Verschiebungen der Kolonnen (und Zeilen) zulässig sein, weil eben die betreffenden Quadrate, wie schon dort gesagt ist, „pandiagonal" sind.

der Stellung *I* (52413) aneinander geschoben und wir wollen uns dies Verfahren beliebig weit nach allen Seiten fortgesetzt und das so entstandene Brett als ein einziges, zusammenhängendes, wenn auch sehr großes vorstellen, so daß also die in der Figur stärker ausgezogenen Linien nicht als Schranken anzusehen sind, sondern lediglich zur Hervorhebung der Periodizität unserer Figur dienen sollen. Wenn wir nun einen

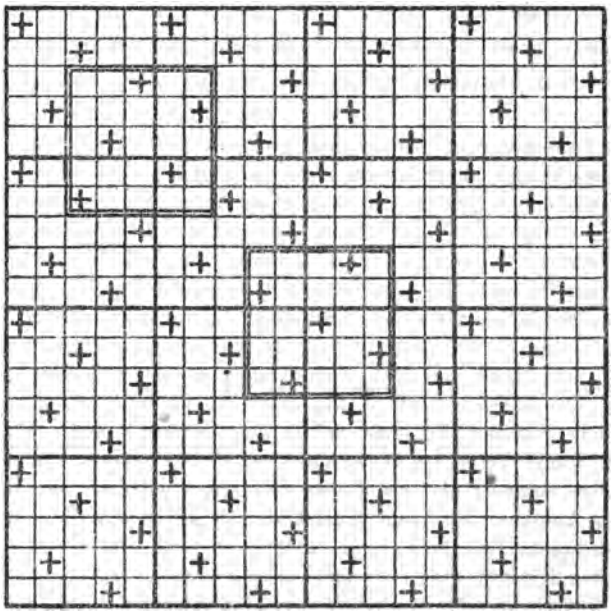


Fig. 17.

quadratischen Rahmen, der gerade 25 unserer Felder faßt, irgendwo auf ein 25-feldriges Gebiet unseres Brettes legen, so werden wir — dies ist nun die Folge der hervorgehobenen zyklischen Beziehungen der Lösungen unseres Falles zueinander — in dem Innern des Rahmens stets eine der 5 Lösungen von *A* erblicken. Wir haben in der Figur zwei solcher Lagen des Rahmens durch die doppeltgezogenen Linien angedeutet: in dem einen Falle weist sein Inneres Lösung *IV* (unsere alte Fig. 5), im andern Falle *III* (Fig. 7) auf.

Wir sind jedoch in der Lage, noch eine weitere Merkwürdigkeit des Falles $n = 5$ hervorzuheben: Wir denken uns einen Würfel aus $5^3 = 125$ kleinen Würfeln zusammengesetzt; wir können ihn uns in 5 horizontale Schichten von je 25 solcher kleinen Würfel zerlegt denken und, entsprechend den 3 Richtungen des Raumes, auch in 2 Systeme von je 5 solchen vertikalen Schichten. Eine jede derartige — horizontale oder vertikale — Schicht wollen wir nun als ein Schachbrett ansehen und uns die betreffenden Figuren etwa in den kleinen Würfeln stehend denken[1]). Besetzen wir

1) Das räumliche Schach hat übrigens auch praktische Schachspieler beschäftigt; der bekannte Schachmeister Kieseritzky verfertigte ein solches und zeigte es dem berühmten Anderssen gelegentlich des Londoner Turniers 1851; s. Jean Dufresne, „Das Schachspiel und seine Verehrer", Deutsche Schachzeitung, Bd. XXXIII, 1878, p. 141. Neuerdings ist dann das „Raumschach", auch scherzweise „Liftschach" genannt, wieder — als neue „Erfindung" — aufgetaucht, vgl. darüber Artikel von dem Verfasser dieses Buches in „Frankfurter Zeitung" vom 17. Sept. 1907 (Nr. 258, Abendblatt); sowie in „Wiener Schachzeitung", 10. Jahrg., 1907, p. 312—317. — Es sei hier die beiläufige Bemerkung gestattet, daß eine Ausdehnung unseres Königinnenproblems auf den Raum unter Annahme einer den 3 Dimensionen entsprechend erweiterten Gangart der Königin kein Interesse zu bieten scheint, d. h. also die Aufgabe: in einem Würfel von n^3 Fächern n Königinnen so unterzubringen, daß keine eine andere schlägt. Unter Gangart der räumlichen Königin wird man dabei analog offenbar zu verstehen haben, daß die Königin in jeder der drei oben im Text unterschiedenen „Schichten" des Würfels, zu denen ihr Feld gehört, sowohl als Turm wie als Läufer (Gangart der ebenen Königin) und ferner von ihrem Feld aus in der Richtung jeder der 4 Körperdiagonalen des Würfels (Gangart des räumlichen Läufers) sich bewegen und schlagen darf. Bei dieser Form der Übertragung des Problems auf den Raum ist die Anzahl der Königinnen, die ohne Angriff aufgestellt werden können, jedenfalls $> n$, für höhere Werte von n vermutlich sogar beträchtlich größer. Schon für den Fall von 3^3 Fächern kann man 4 den Bedingungen genügende Königinnen aufstellen. Denkt man sich nämlich in dem Würfel der 27 Fächer die 3 horizontalen Schichten von je 9 Fächern mit α, β, γ bezeichnet, während die 9 Fächer oder Felder jeder dieser Schichten, wie auf dem gewöhnlichen Schachbrett, durch a, b, c einer- und 1, 2, 3 andererseits unterschieden sein mögen, so sind 4 Königinnen auf

die unterste horizontale Schicht nun so mit 5 Königinnen, wie es die erste Lösung einer der obigen Klassen A und B angibt, die zweite Schicht entsprechend der zweiten Lösung derselben Klasse usw., so genügen nicht nur die 5 horizontalen Schichten den Bedingungen unseres Problems, sondern auch eins der beiden Systeme vertikaler Schichten, da unsere Schemata A und B, wie schon oben gesagt, auch in ihren Kolonnen, nicht nur in den Zeilen, Lösungen unseres Problems darstellen. Das andere System vertikaler Schichten genügt jedoch unseren Bedingungen nicht, vielmehr befinden sich die 5 Königinnen jeder Schicht dort in solchen Stellungen, daß sie sich als Türme zwar nie, dagegen als Läufer in jeder der Schichten angreifen (in der mittleren stehen sie sogar alle 5 in der Diagonale, man beachte die Stellung der Zahl 3 in den beiden Schemata).

Der innere Grund für diese merkwürdigen Anordnungsmöglichkeiten liegt, wie wir im nächsten Paragraphen (s. S. 247/8) sehen werden, darin, daß 5 weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist (vgl. auch in Bd. II: Kap. XIII, § 2), und wir können hiernach vermuten, daß für $n = 7$ etwas Ähnliches gilt. In der Tat lassen sich von den 40 Lösungen dieses Falls 28 in 4 Klassen von je 7 so anordnen, daß die Lösungen derselben Klasse durch zyklische Vertauschungen auseinander hervorgehen. Jede dieser Klassen besteht aus einer Lösung, die zu der Stammlösung 4) unserer Tabelle auf S. 225 gehört, und aus 6 weiteren Lösungen, von denen je 2 zu den Stammlösungen 1), 2), 6) der betreffenden Tabelle ge-

---

bezw. $\alpha a1$, $\alpha b3$, $\beta c1$, $\gamma a2$ mit den Bedingungen unseres Problems verträglich. Zu dieser Stellung gibt es 15 weitere entsprechende, womit allerdings die Möglichkeiten erschöpft sind, ebenso wie auch eine fünfte Königin nicht mehr unterzubringen ist. — In einem Würfel von 4^3 Fächern lassen sich dergestalt 7 Königinnen aufstellen, mehr jedoch nicht; es gibt eine große Zahl Stellungen dieser Art, z. B. $\alpha a1$, $\alpha b3$, $\alpha d2$, $\beta d4$, $\gamma a2$, $\delta c1$, $\delta d3$. In einem Würfel von 5^3 Fächern lassen sich jedenfalls 10 Königinnen aufstellen, z. B. $\alpha a1$, $\alpha b3$, $\alpha c5$, $\alpha d2$, $\alpha e4$, $\beta a5$, $\delta b2$, $\delta c4$, $\varepsilon d1$, $\varepsilon e3$; ich habe jedoch nicht untersucht, ob 10 bereits die Maximalzahl ist.

hören, während die Lösungen, die zu 3) und 5) gehören, hierbei nicht auftreten. Es ist daher insbesondere natürlich auch möglich, das Brett der 49 Felder mit 49 Königinnen von 7 verschiedenen Farben vollständig und in der Weise zu besetzen[1]), daß zwischen den Königinnen derselben Farbe nie ein Angriff stattfindet, ja dies läßt sich sogar — wie für $n = 5$ auf zwei — auf vier verschiedene Arten (vgl. S. 248) ausführen, von denen Fig. 18 eine veranschaulicht (die Felder gleichen Buchstabens stellen immer Königinnen gleicher Farbe, d. h. also je eine Lösung des Siebenköniginnenproblems, dar).

F	G	A	B	C	D	E
D	E	F	G	A	B	C
B	C	D	E	F	G	A
G	A	B	C	D	E	F
E	F	G	A	B	C	D
C	D	E	F	G	A	B
A	B	C	D	E	F	G

Fig. 18 ($n = 7$).

Auf dem gewöhnlichen Schachbrett ist eine entsprechende gleichzeitige Aufstellung von 8 Lösungen des Achtköniginnenproblems ausgeschlossen; höchstens kann man dort 6 Systeme von je 8 Königinnen in dieser Weise aufstellen: Lösung 2 unserer Tabelle S. 225/226 nebst 3 Derivierten zusammen mit Lösung 10 nebst einer Derivierten bieten z. B. eine solche Möglichkeit[2]), die wir in Fig. 19 darstellen.

B		A	E	F	D		C
	C	F	D	A	E	B	
F	A		B	C		D	E
D	E	C			B	F	A
C	F	D			A	E	B
E	B		A	D		C	F
	D	E	C	B	F	A	
A		B	F	E	C		D

Fig. 19 ($n = 8$).

1) Vgl. auch Anm. 2, S. 235/236.

2) J. C. S. in Chess Monthly IX, 1887/88, p. 314/15. J. C. St. Clair (derselbe?) reproduziert diese Stellung und fügt — als zweite — noch eine weitere hinzu in den Educational Times Reprints, New Series, vol. IV, 1903, p. 28/29. Diese letztere Stellung gestattet, das eine

Was ferner das Vorkommen der weißen und schwarzen Felder (s. Fig. 1, S. 172) anlangt, so kommen beide Klassen in jeder Lösung für das gewöhnliche Schachbrett stets gleich oft, je viermal, vor.[1]). Allgemein ist, wie R. Hoppe bemerkt hat[2]), *bei geradem n jede Farbe durch eine gerade Anzahl von Feldern in jeder Lösung vertreten, bei ungeradem n aber die Farbe der Diagonalfelder in ungerader, die andere in gerader Anzahl.* Stellt man sich nämlich die Aufgabe, n Türme auf einem Schachbrett von n^2 Feldern so aufzustellen, daß keiner den anderen angreift, so muß natürlich in jeder Zeile und Kolonne je ein Turm stehen. Die einfachste Lösung wäre eine Diagonalstellung, in unserer Schreibweise $1, 2, \ldots n$. Aus dieser würden alle anderen hervorgehen, indem man sukzessive alle möglichen Vertauschungen von je zwei der n Elemente vornimmt. Durch eine solche Vertauschung ändern sich entweder die Anzahlen der weißen und schwarzen Felder gar nicht oder um je 2 Felder. Denn die 4 dabei in Betracht kommenden Felder, die beiden der alten und die beiden der neuen Lösung, bilden die Ecken

---

System der 8 Königinnen allein um 180° zu drehen; führt man dies aus und spiegelt die ganze Figur an der einen Diagonale, so erhält man eine Stellung, die ebendort (p. 28) von J. Blaikie unabhängig von der ersteren angegeben ist. — Bei einem von Hugo Rosenfeld in Nürnberg angegebenen und von der Firma Paul Joschkowitz-Magdeburg ehemals als „Combino" vertriebenen Spiel (Gebrauchsm. Nr. 386871, erteilt am 2. Aug. 1909) wurde gefordert, neben 6 vollständigen Systemen von je 8 Königinnen noch zwei unvollständige von je 7 in entsprechender Weise auf dem Brett aufzustellen, so daß im ganzen nur 2 Felder (2 benachbarte Eckfelder) frei bleiben.

1) Auch für das Brett von 4^2 Feldern gilt Entsprechendes; für $n = 6$ ist die eine Farbe stets viermal, die andere also zweimal und für $n = 10$ die eine sechsmal, die andere also viermal vertreten; s. Pein, l. c. p. 42.

2) „Bemerkung zum Königinnen-Problem", Archiv der Mathem. u. Phys., 2. Reihe, VIII, 1890, p. 333—334. Für $n = 8$ bereits bei Jaenisch, „Traité", t. I, p. 132/33. Vgl. a. K. Rohn, „Beitrag zum Acht-Damen-Problem", Abhandl. der Naturw. Gesellsch. Isis in Dresden, 1889 Juli/Dez., p. 89.

eines Rechtecks auf dem Schachbrett. Solche Eckfelder eines Rechtecks sind aber stets entweder alle in derselben Farbe gehalten oder 2 derselben (gegenüberliegend oder anliegend) weiß und die anderen beiden schwarz. Es kann sich daher die Anzahl der Felder einer Farbe immer nur um eine gerade Anzahl ändern. Die Farbe der Diagonale / ist nun in der Ausgangslösung n-mal vertreten, womit sich das angegebene Resultat für die Lösungen des Turmproblems ergibt. Die Lösungen des Königinnenproblems müssen sich aber alle unter denen des Turmproblems befinden, müssen also gleichfalls die angegebene Eigenschaft besitzen.

§ 7. Methoden zur Auffindung der Lösungen. Beweis der Existenz von Lösungen für jedes $n > 3$.

Eine allgemeine Methode, die es ermöglichte, sofort für jeden bestimmten Fall unseres n alle Lösungen hinzuschreiben, ist bisher nicht gefunden und scheint auch kaum denkbar. Hat doch selbst der große Gauß sich auf „methodisches Tatonniren" beschränken müssen, wie wir oben sahen. Das zu diesem Zweck von ihm angegebene und oben (§ 2) besprochene Verfahren ist nicht nur das zunächstliegende, sondern auch wohl das einfachste und bisher noch durch kein zweckmäßigeres ersetzt worden. Es ist im Prinzip so einfach, daß nach ihm E.-M. Laquière, wie beiläufig bemerkt sein mag, die 92 Lösungen für das gewöhnliche Schachbrett durch ein Kind in einem Nachmittag bestimmen lassen konnte, wobei nur drei Fehler vorkamen.[1]) Freilich wird dies Verfahren, wie schon oben bemerkt wurde, für größere Werte von n so langwierig, daß es der Unausführbarkeit gleichkommt.

Eine Hauptschwierigkeit bei unserem Problem liegt darin, daß die Gangart der Königin eine Komposition aus 2 heterogenen Elementen, der Gangart des Turms und der der Läufer, ist. Es lag daher nahe, zunächst die Forderung zu erheben, 8 Türme auf dem Schachbrett so aufzustellen, daß keiner den

1) Lucas, „Récréations", t. I, p. 80.

anderen schlagen kann, und dann diejenigen unter diesen Stellungen auszusuchen, in denen die Türme durch Läufer ersetzt werden können, ohne daß sich alsdann 2 Läufer gegenseitig schlagen, — resp. zuerst die betreffenden Läuferstellungen und darauf unter ihnen die Turmstellungen zu eruieren. Tatsächlich teilen sich die wichtigsten Methoden nach diesen beiden Gesichtspunkten. Die Bezeichnung der Felder kann nun leicht so gewählt werden, daß aus ihr ohne weiteres erkennbar ist, ob die eine der beiden Bedingungen erfüllt ist, und man erhält alsdann ohne weiteres überhaupt nur solche Kombinationen, die dem Problem der Türme resp. dem der Läufer genügen; aus diesen Kombinationen sind dann diejenigen auszumerzen, die nicht auch zugleich der anderen Bedingung genügen. Wählen wir die von uns oben zur Darstellung der Lösungen stets angewandte Schreibweise, so erfüllt jede Kombination der 8 Zahlen 1, 2, ... 8 von vornherein unsere Forderung bezüglich der Türme, und es sind jetzt nur noch alle möglichen Kombinationen dieser 8 Zahlen zu bilden und unter ihnen diejenigen herauszusuchen, die zugleich eine Lösung des Läuferproblems darstellen.

Zu dem Ende betrachten wir zunächst irgend zwei Läufer, die sich gegenseitig angreifen, z. B. auf den Feldern *b*6 und *d*4. Das eine dieser Felder liegt um zwei Zeilen tiefer als das andere, zugleich aber auch um zwei Kolonnen weiter nach rechts. Würden wir also diesen rechten Läufer zwei Zeilen höher rücken, so würde er mit dem anderen in gleicher Zeile liegen. Stände der rechte Läufer drei Kolonnen weiter rechts als der linke, also — bei gegenseitigem Angriff — auf *e*3, so wäre er, um in dieselbe Zeile mit dem linken aufzurücken, auch um drei Zeilen höher zu schieben usw. Wenn wir nun 8 Läufer auf dem Brett haben, in jeder Kolonne einen, so wollen wir folgendermaßen verfahren: Wir schieben den Läufer der ersten Kolonne (links) eine Zeile höher, den der zweiten um zwei Zeilen usw., den der letzten Kolonne um 8 Zeilen, wobei man sich das Schachbrett nach oben hin hinreichend verlängert denken mag: Stehen dann

hinterher zwei Läufer in derselben Zeile, so griffen diese sich bereits vorher an. Das Umgekehrte, daß, wenn kein Paar von Läufern jetzt in derselben Zeile steht, es vorher unter den 8 auch keinerlei Angriff gab, können wir hiernach noch nicht behaupten; denn wir haben bisher nur den Angriff auf denjenigen Diagonalreihen in Betracht gezogen, die in der Richtung $\diagdown$ verlaufen. Ein gegenseitiger Angriff auf einer dieser Reihen ist in dem angegebenen Falle allerdings ausgeschlossen. Ob jedoch von einem Angriff in den Reihen $\diagup$ dasselbe gilt, bleibt unter der angegebenen Bedingung noch völlig unentschieden. Wir werden daher auch folgende Probe anstellen müssen, nachdem wir die Läufer zuvor wieder auf ihre alten Plätze gerückt haben: Wir beginnen jetzt am rechten Ende und schieben den äußersten Läufer dort (Kolonne h) um eine Zeile höher, den der nächsten (siebenten) Kolonne um zwei, schließlich den der ersten Kolonne um acht Zeilen höher. Stehen dann hinterher zwei Läufer in derselben Zeile, so griffen sie sich vorher auf einer Linie der Richtung $\diagup$ an. Ist dies aber nicht der Fall, so können wir jetzt, nach diesen beiden Proben, sagen, daß ein Läuferangriff überhaupt nicht vorkommt: weder in den Reihen $\diagdown$ noch in denen $\diagup$.

Die Bedingungen dafür, daß eine Position von 8 Türmen ohne gegenseitigen Angriff auch den Läuferangriff ausschließt, können wir jetzt also so formulieren, daß, wenn man zu den Ziffern einer Kombination der Reihe nach von links nach rechts beziehungsweise 1, 2, 3, ... 8 addiert, die so erhaltenen 8 Summen untereinander alle verschieden sind und daß dasselbe auch der Fall ist, wenn man zu den Ziffern beziehungsweise 8, 7, ... 2, 1 addiert.[1]) Dieselbe Bedingung können wir auch dahin aussprechen, daß der absolute Unterschied zweier Ziffern in einer Kombination niemals gleich dem Unterschied ihrer Platznummern sein darf[2]); so ist z. B. die Stellung 35741862

1) Siehe Gauß, l. c. p. 119, Brief vom 27. Sept. 1850.

2) So wurde unsere Aufgabe z. B. an den bereits (S. 212, Anm.) zitierten Stellen der Nouv. ann. de mathém. von Lionnet formuliert.

unbrauchbar, weil der Unterschied zwischen 3 und 8 derselbe ist, wie zwischen ihren Platznummern (1 und 6), oder aber der absolute Unterschied zwischen 7 und 2 derselbe wie zwischen ihren Platznummern (3 und 8), was sich nach dem obigen Gaußschen Kriterium dadurch ausdrücken würde, daß nach Addition von bzw. $1, 2, \ldots 8$ sich an dritter und letzter Stelle dieselbe Summe 10 und bei Addition von $8, 7, \ldots 1$ sich an erster und sechster Stelle dieselbe Summe 11 ergeben würde.

Will man dagegen die Bedingung bezüglich der Läufer schon in die Schreibweise hineinlegen, so wählt man nach Siegmund Günther[1]) die durch das Schema der Fig. 20 für das Beispiel eines Bretts von 25 Feldern angegebene Notation. 2 Felder, zwischen denen ein Läuferzug möglich ist, haben hier stets entweder gleiche Buchstaben oder gleiche Zahlenindices, und es handelt sich also nur darum, aus allen Kombinationen, in denen weder ein Buchstabe noch ein Zahlenindex mehr als einmal vorkommt, diejenigen auszuwählen, die zugleich eine Lösung des Turmproblems darstellen. Es sind dies ja nun alle diejenigen Kombinationen, von denen kein Paar von Elementen derselben Horizontal- oder Vertikalreihe angehört. Diese Kombinationen eines solchen Systems sind aber auch gerade diejenigen, die die Glieder einer Determinante ausmachen, und man wird daher, um das „Tatonnieren planmäßig" zu gestalten, das obige System als Determinante auffassen, alle Glieder derselben entwickeln und dann diejenigen unter ihnen streichen, in denen ein Buchstabe oder ein Zahlenindex mehr als einmal vorkommt. Immerhin ist die uns übrigens bereits oben[2]) entgegengetretene Beziehung zu den Determinanten natürlich nur eine rein äußerliche, da eine wesentliche Eigenschaft derselben, das verschiedene Vorzeichen der Glieder je nach der Anzahl ihrer Inversionen, hier belanglos ist, und etwas Wesentliches ist mit dieser Bezugnahme daher nicht gewonnen. Wir wollen jetzt diese Günthersche Methode an dem obigen Beispiel (Fig. 20) auseinandersetzen unter Benutzung der von Glaisher[3]) dazu gemachten Zusätze.

a_1	c_2	e_3	g_4	k_5
b_2	a_3	c_4	e_5	g_6
d_3	b_4	a_5	c_6	e_7
f_4	d_5	b_6	a_7	c_8
h_5	f_6	d_7	b_8	a_9

Fig. 20.

1) „Zur mathem. Theorie des Schachbretts", Archiv für Math. und Phys. 56, 1874, p. 281—292; vgl. auch von demselben „Lehrbuch der Determinanten-Theorie", Erlangen 1875, p. 46.

2) S. 232, Anm. 3.

3) „On the problem of the eight queens", Philosophical Magazine, Bd. 48, 1874, p. 457—467.

Diejenigen Lösungen, in denen ein Eckfeld besetzt ist, müssen sich aus den Lösungen für ein 16-feldriges Brett ergeben, wie bereits in § 3 (S. 216) dargelegt wurde. Wir werden daher, da wir die Fälle für kleineres n als erledigt ansehen dürfen, in der Determinante die 4 Eckglieder streichen. Wir wissen bereits (s. S. 216/217), was beiläufig erwähnt sei, daß es in diesem Falle 8 zusammengehörige Lösungen mit besetzten Eckfeldern gibt. — Die Lösungen, in denen g_4 besetzt ist, müssen durch Spiegelung aus denen mit besetztem c_2 zu erhalten sein, und wir scheiden daher auch g_4 aus, so daß unsere Determinante — von den Vorzeichen der Glieder natürlich abgesehen — folgende Entwickelung liefert:

$$c_2 \begin{vmatrix} b_2 & c_4 & e_5 & g_6 \\ d_3 & a_5 & c_6 & e_7 \\ f_4 & b_6 & a_7 & c_8 \\ \cdot & d_7 & b_8 & \cdot \end{vmatrix} + e_5 \begin{vmatrix} b_2 & a_3 & e_5 & g_6 \\ d_3 & b_4 & c_6 & e_7 \\ f_4 & d_5 & a_7 & c_8 \\ \cdot & f_6 & b_8 & \cdot \end{vmatrix}$$

Sind nun aber alle Lösungen mit c_2 bekannt, so kann man daraus auch alle mit g_6, b_8, f_4 durch Drehung und mit c_8, f_6, b_2 durch Spiegelung erhalten, so daß wir in der zweiten Determinante diese Elemente fortlassen dürfen. Ebenso dürfen in der mit c_2 multiplizierten Determinante alle Glieder, in denen c oder 2 vorkommt, gestrichen werden, in der zweiten entsprechend alle Glieder, in denen e oder 8 vorkommt, so daß in dieser zweiten Determinante alle Elemente der ersten Zeile gestrichen werden, mithin diese Determinante ganz wegfällt und wir also nur noch behalten:

$$c_2 \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & e_5 & g_6 \\ d_3 & a_5 & \cdot & e_7 \\ f_4 & b_6 & a_7 & \cdot \\ \cdot & d_7 & b_8 & \cdot \end{vmatrix} = c_2\, e_5 \begin{vmatrix} d_3 & a_5 & e_7 \\ f_4 & b_6 & \cdot \\ \cdot & d_7 & \cdot \end{vmatrix} + c_2\, g_6 \begin{vmatrix} d_3 & a_5 & \cdot \\ f_4 & b_6 & a_7 \\ \cdot & d_7 & b_8 \end{vmatrix}$$

In diesen beiden Determinanten sind wegen der vorgesetzten Elemente e_5 und g_6 wieder alle Glieder mit e oder 5 resp. g oder 6 zu streichen, und es bleibt daher

$$c_2\, e_5 \begin{vmatrix} d_3 & \cdot & \cdot \\ f_4 & b_6 & \cdot \\ \cdot & d_7 & \cdot \end{vmatrix} + c_2\, g_6 \begin{vmatrix} d_3 & a_5 & \cdot \\ f_4 & \cdot & a_7 \\ \cdot & d_7 & b_8 \end{vmatrix}$$

Die erste dieser beiden Determinanten fällt also überhaupt fort, und die zweite liefert als einziges brauchbares Glied: $c_2\, g_6\, a_5\, f_4\, b_8$. Es ist dies die uns schon bekannte (s. S. 216 resp. 225) doppelt-symmetrische Lösung, wozu dann noch die schon erwähnten 8 Lösungen mit den Eckfeldern kommen.

Eine von den vorhergehenden wesentlich verschiedene Methode ist die von Lucas publizierte[1]) von De la Noë. Dieselbe besteht darin, daß man sich das Schachbrett in mehrere Teile zerlegt denkt (s. Fig. 38, S. 278): der erste Teil ist das Quadrat der 4 Mittelfelder (bei geradem n) resp. das Mittelfeld (bei ungeradem n), der zweite der Rand, den man um den ersten Teil herumlegen muß, um wieder ein Quadrat zu erhalten, und so nimmt man entsprechend die weiteren Ränder. Man versucht dann, auf jedem der Teile, von innen anfangend, möglichst viele Königinnen aufzustellen. Besetzt man in dem Fall des gewöhnlichen Schachbretts eins der unter sich gleichberechtigten Mittelfelder, so sieht man sofort, daß das nächste Gebiet nur 4 für die zweite Königin noch offene Felder besitzt, erkennt aber bald, daß nicht beide inneren Teile mit je einer Königin besetzt werden dürfen, wenn man noch die anderen 6 Königinnen unterbringen will.

Eine andere, von Lucas[2]) selbst gefundene Methode liefert in gewissen Fällen eine Anzahl von Lösungen: Man bildet, mit einer Zahl a beginnend, eine arithmetische Reihe von n Zahlen mit der Differenz d, also $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ a+(n-1)d$, wobei von den Zahlen, die $> n$ sind, ihre kleinsten Reste mod n zu nehmen sind. Wenn d relativ prim zu n ist, erhält man so ein vollständiges Restsystem mod n. Der Unterschied zweier Zahlen von den Platznummern p und q ist also $\equiv (p-q)d \bmod n$. Dies darf nun den Bedingungen unseres Problems zufolge (s. S. 244) weder dem positiven noch dem negativen Wert von $(p-q)$ kongruent mod n sein. Die Kongruenzen

$$(p-q)\,d \equiv \pm (p-q) \bmod n \text{ oder}$$
$$(p-q)\,(d \mp 1) \equiv 0 \bmod n$$

bedingen aber, wenn n relativ prim zu $d+1$ und zu $d-1$ ist, daß $p=q$ ist, so daß also umgekehrt alle unsere Forderungen sicher erfüllt sind, sobald $d+1$, d und $d-1$ relativ prim zu n sind. Allerdings ist ein solches d unmöglich, wenn n durch 2 oder 3 teilbar ist (vgl. a. in Bd. II: Kap. XIII, § 2). In allen anderen Fällen ist diese Methode aber anwendbar, z. B. mit $d=2$; insbesondere lassen sich, wenn n eine Primzahl >3 ist, stets $n-3$ verschiedene Werte für d wählen. Zu jedem gehören dann n Lösungen, da

1) Revue scientifique 1880 (vgl. S. 226, Anm.) und „Récréations", t. I, p. 71.

2) „Récréations", t. I, p. 84. S. jedoch a. Anm. 2 der nächsten Seite.

als Anfangsglied a der arithmetischen Reihe eine beliebige der n Zahlen $1, 2, \ldots n$ gewählt werden kann, so daß man also, wenn n eine Primzahl ist, $n(n-3)$ Lösungen durch diese Methode erhält.[1]) Die n Lösungen mit demselben d gehen durch zyklische Vertauschungen auseinander hervor, und wir erkennen jetzt den inneren Grund für die im vorigen Paragraphen gegebenen Anordnungen der Lösungen in den Fällen $n=5$ und $n=7$. Im ersteren Falle kann $d=2$ oder 3 gewählt werden, jede der beiden Annahmen liefert 5 durch zyklische Vertauschungen unterschiedene Lösungen, im ganzen also 10 Lösungen, womit für diesen Fall überhaupt alle Lösungen ermittelt sind, während der Fall $n=7$ durch unsere Methode nicht erschöpft wird, da zu den für $d=2, 3, 4, 5$ sich hier ergebenden $4 \cdot 7 = 28$ Lösungen noch weitere 12 hinzutreten. Nächst $n=7$ ist diese Methode dann wieder auf den wohl zuerst von G. Bellavitis[2]) unter diesem Gesichtspunkt betrachteten Fall $n=11$ anwendbar.

Wenn wir auch nicht in der Lage sind, eine allgemeine Methode anzugeben, die uns gestattet, sofort alle Lösungen eines bestimmten Falles hinzuschreiben, so sind wir doch in der Lage, gewisse kanonische Formen von Lösungen, für beliebige Werte von $n > 3$ gültig, aufzustellen, wodurch also die Existenz von Lösungen für jedes $n > 3$ erwiesen wird. Solche Lösungen lassen sich nach Pauls[3]) folgendermaßen angeben, wenn wir wieder, wie zuvor, nur die Zeilen der einzelnen Königinnen nach der Reihenfolge der Kolonnen in der Form $a_1, a_2, \ldots a_n$ anmerken:

Ist n gerade, $= 2m$, so unterscheiden wir:

---

1) Über die Anzahl der nach dieser Methode für beliebiges n sich ergebenden Lösungen s. Lucas ibidem, p. 232, sowie Frolow, „Les carrés magiques", Note III, p. 41 (Neudruck ohne Jahresangabe).

2) Siehe S. 229/230, Anm. 1. — Im Grunde genommen rührt daher die obige Methode bereits von Bellavitis her. Vgl. auch bezüglich des Falles $n=5$ die S. 226, Anm. zitierte Note desselben Autors (l. c. p. 435).

3) „Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrete", Deutsche Schachzeitung, Bd. 29, 1874, p. 129—134; 257—267; vgl. a. Intermédiaire des mathématiciens, t. I, 1894, p. 140/141 (J. Franel). — Durch Zerlegung des Quadrates der n^2 Felder in kleinere Quadrate konstruiert H. Tarry (Assoc. franç. 26, Congrès de Saint-Étienne 1897, I, p. 176) Lösungen, ohne daß das Verfahren jedoch dort näher angegeben ist.

1) n, geteilt durch 6, gibt als Rest 0 oder 4; eine Lösung ist alsdann stets

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ldots\ 2m \mid 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ 2m-1$$

oder

$$a_i = 2i$$
$$a_{n+1-i} = 2m+1-2i \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

2) n, geteilt durch 6, gibt den Rest 2; die Lösung ist dann

$$4,\ 2m-2,\ 2m-4,\ \ldots\ 8,\ 6,\ 2m,\ 2 \mid 2m-1,\ 1,\ 2m-5,$$
$$2m-7,\ \ldots\ldots\ 3,\ 2m-3$$

oder

$$a_i = 2m-2(i-1) \quad (i = 2, \ldots m-2);$$
$$a_{n+1-i} = 2i-1$$
$$a_1 = 4;\ a_{m-1} = n;\ a_m = 2;$$
$$a_n = n-3;\ a_{m+2} = 1;\ a_{m+1} = n-1.$$

Man erkennt leicht, daß außer für $n = 2$ niemals $a_l = a_k$ oder $a_l - a_k = \pm(l-k)$ — für zwei beliebige, voneinander verschiedene Werte der Indices l und k von 1 bis n — ist, womit den Bedingungen des Problems genügt wird (vgl. S. 244). Der Leser, der diese einfache Betrachtung anstellt, wird dabei zugleich die Gründe erkennen, welche die Zweiteilung unserer Entwicklung — je nach den Resten der Zahl n bei Division durch 6 — veranlaßt haben, Man überzeugt sich ferner leicht, daß bei diesen Lösungen kein Feld der beiden Diagonalen besetzt ist. Dies befähigt uns aber nach § 3 (Anfang), sofort für jedes ungerade $n = 2m+1$ eine Lösung anzugeben; brauchen wir doch vor die für $n = 2m$ gegebene Lösung nur $2m+1$ zu setzen. Damit ist dann für jedes $n \geqq 4$ die Existenz einer Lösung gesichert.

§ 8. Über symmetrische und partiell-symmetrische Lösungen.

Während die Spiegelung, wie schon S. 222 bemerkt, stets zu einer Lösung eine neue liefern muß, so daß — beiläufig bemerkt — die Gesamtanzahl der Lösungen für jedes n eine gerade

Zahl ist, braucht dies bei Drehungen nicht der Fall zu sein. Vielmehr wissen wir bereits, daß alle symmetrischen Lösungen, gleichgültig, ob einfach- oder doppelt-symmetrische, das gemein haben, daß sie bei Drehung um 180° in sich übergehen. Allgemein erhalten wir nun aus einer Lösung die durch Drehung um 180° sich ergebende dadurch, daß wir die Ziffern der ursprünglichen Lösung bei der gewöhnlich von uns angewandten Schreibweise alle von $n+1$ abziehen und dann die Reihenfolge umkehren (s. S. 219). Hieraus folgt sofort:

Satz 1: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Lösung durch Drehung um 180° wieder in sich übergeht, d. h. also symmetrisch ist, ist die, daß immer je 2 in dem Lösungsschema gleich weit von beiden Enden entfernte Ziffern sich zu $n+1$ ergänzen.*

So ist z. B. 64718253 symmetrisch, weil $6+3=4+5=7+2=1+8=9$ ist. Symmetrisch sind daher auch die auf der vorigen Seite allgemein für gerades n gegebenen Paulsschen Lösungen; bei unserer Schreibweise ist nämlich sofort ersichtlich, daß dort stets $a_i + a_{n+1-i} = n+1$ ist. Es sei hier schon vorweg die Bemerkung gestattet, daß diese Paulssche kanonische Form, wie sich aus den weiteren Entwicklungen dieses Paragraphen ergeben wird (s. S. 253), für jedes gerade n eine einfach-symmetrische Lösung liefert außer für $n=4$, wo dieselbe doppelt-symmetrisch ist. Für gerade n gibt es also stets symmetrische und zwar — mit der angegebenen Ausnahme — stets einfach-symmetrische Lösungen.

Bei den doppelt-symmetrischen Lösungen ergibt bereits eine Drehung um 90° wieder das ursprüngliche Bild. Da nun jedes Feld — mit alleiniger Ausnahme des Mittelfeldes bei ungeradem n — durch eine Drehung um 90° an die Stelle eines anderen kommt, so müssen sich offenbar die Felder zu je vier oder „Quadrupeln", wie wir sagen wollen, anordnen, und zwar so, daß die Felder eines Quadrupels bei den Drehungen untereinander ihre Plätze vertauschen. Wir ersehen hieraus, da immer n Felder besetzt sind, daß doppelt-symmetrische Lösungen nur dann auftreten können, wenn n durch 4 teilbar

ist, oder, durch 4 geteilt, den Rest 1 läßt, z. B. für die Fälle $n = 4, 5$, dagegen nicht für $n = 6, 7$; immerhin ist auch in jenen Fällen das Auftreten von doppelt-symmetrischen Lösungen keineswegs notwendig, wie uns die Fälle $n = 8, 9$ zeigen, die allerdings in der Hinsicht möglicherweise allein dastehen.

Bevor wir die doppelt-symmetrischen Lösungen unseres Problems näher zu studieren suchen, wollen wir auf ganz beliebigem Brett, etwa dem von 100 Feldern, ein beliebiges Symmetriequadrupel, z. B. das der 4 Kreuze in Fig. 21, ins Auge

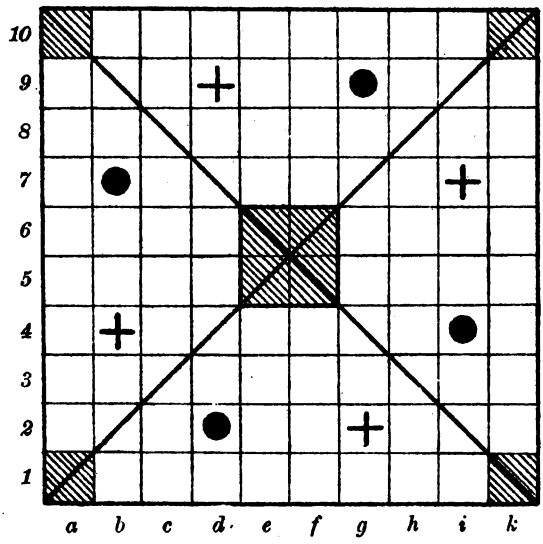


Fig. 21.

fassen. Die Figur der 4 Kreuze geht bei allen Drehungen in sich über, bei Spiegelungen dagegen gelangen die Kreuze an die Stellen der 4 schwarzen Kreise, und zwar gleichgültig, ob die Spiegelung an einem horizontalen oder einem vertikalen Brettrand erfolgt, da der Unterschied dieser beiden Spiegelungen allgemein nur in einer Drehung um 180° besteht (vgl. S. 219 resp. 220), die hier ja aber ohne Wirkung ist Auch die Spiegelungen an einer der beiden Diagonalen, Operationen, die allgemein gleichbedeutend sind mit einer Drehung (um 90° resp. 270°) und nach-

herigen Spiegelung an einem Brettrande, führen hier offenbar die Stellung der 4 Kreuze jedesmal in die der 4 Kreise über. Zusammenfassend können wir also sagen: Das Symmetriequadrupel der 4 Kreuze geht bei allen Drehungen in sich, bei allen Spiegelungen — an den Bretträndern, wie an den Diagonalen — in das Symmetriequadrupel der 4 Kreise über. Hieraus folgt aber, daß es zu jedem Kreuz einen Kreis in derselben Zeile geben muß, eben denjenigen, an dessen Platz das Kreuz — bei Spiegelung an einem vertikalen Brettrand — rückt. Die 4 Kreise stehen also in denselben 4 Zeilen wie die 4 Kreuze, sie beherrschen dieselben Zeilen wie diese. Dasselbe gilt offenbar hinsichtlich der Kolonnen. Es gilt aber auch bezüglich der schrägen (diagonalgerichteten) Linien: Irgendeins der Kreuze, beispielsweise *b*4, steht allgemein in zwei diagonalgerichteten Linien, die es als Läufer beherrscht; spiegelt man das Kreuz an einer der beiden Diagonalen des Quadrats, so bleibt es hierbei jedesmal in einer seiner beiden diagonalgerichteten Linien, rückt aber — nach dem soeben gewonnenen, durch Sperrdruck hervorgehobenen Hülfssatze — auf den Platz eines Kreises, in unserem Falle das eine Mal nach *d*2, das andere Mal nach *g*9. In jeder der beiden diagonalgerichteten Linien, in denen das Kreuz steht, steht also auch je ein Kreis. Die von der Gesamtheit der 4 Kreuze beherrschten Zeilen, Kolonnen und diagonalgerichteten Linien sind also genau dieselben wie die von der Gesamtheit der 4 Kreise beherrschten. Der Leser kann sich für unser Beispiel natürlich auch praktisch sehr leicht von der Richtigkeit unserer Behauptung überzeugen: Er wird finden, daß die 4 Kreuze, als Königinnen gedacht, das ganze Brett mit Ausnahme der 4 Eckfelder und der 4 Mittelfelder, also mit Ausnahme der 8 schraffierten Felder, beherschen, und daß auch die 4 Kreise diese und nur diese 8 Felder unbeherrscht lassen. Wir haben somit folgendes Resultat gewonnen:

Bemerkung: Bilden 4 Königinnen auf einem quadratischen Brett ein Symmetriequadrupel und führt man dieses in sein Spiegelbild über, so beherrscht das

neue Quadrupel insgesamt genau dieselben Brettfelder wie das ursprüngliche.

Analytisch kommt dies folgendermaßen zum Ausdruck: Ist p, q das Feld einer Königin (p Kolonnen-, q Zeilennummer), so wird das Symmetriequadrupel gebildet von den Königinnen:

I	II	III	IV
p, q	$q, n+1-p$	$n+1-p, n+1-q$	$n+1-p, q$

und das Spiegelbild dazu ist (Spiegelung an einem horizontalen Brettrand):

$p, n+1-q$	q, p	$n+1-p, q$	$n+1-q, n+1-p$.

Das erste Quadrupel beherrscht die Zeilen q, $n+1-p$, $n+1-q$, p und das zweite genau dieselben; dasselbe gilt bezüglich der Kolonnen. Es gilt dies aber auch bezüglich der diagonalgerichteten Reihen; z. B. steht p, q, die erste Königin des ersten Quadrupels, mit q, p, der zweiten des zweiten Quadrupels, auf derselben Diagonalreihe $\diagdown$, weil $p+q=q+p$ ist, und auf der anderen Diagonalreihe von p, q, also derjenigen der Richtung $\diagup$, steht $n+1-q$, $n+1-p$, die vierte Königin des zweiten Quadrupels, weil $n+1-p+q=n+1-(n+1-q)+n+1-p$ ist (vgl. das Gaußsche Kriterium, S. 244). — Vergleicht man übrigens die vorstehende analytische Form eines Quadrupels mit den Paulsschen kanonischen Lösungen (S. 248/9), so sieht man, daß diese außer für $n=4$ nicht doppelt-, sondern einfach-symmetrisch sind, wie proleptisch bereits oben (S. 250) angegeben war.

Denken wir uns nun in Fig. 21 eine fünfte Königin so aufgestellt, daß sie von keiner der 4 den Kreuzen entsprechenden Königinnen angegriffen wird, so wird sie nach unserer obigen „Bemerkung" auch von keiner der 4 Königinnen, die den 4 Kreisen entsprechen, angegriffen Haben wir also irgendeine Lösung des Problems der n Königinnen und bilden 4 von diesen ein Symmetriequadrupel, so können wir die Konfiguration dieser 4, ohne an der Stellung der übrigen irgendetwas zu ändern, spiegeln und erhalten so eine neue Lösung des Problems: Die übrigen Königinnen, die von dem ersten Quadrupel nicht angegriffen wurden, sind auch von Seiten des nachherigen Quadrupels keinen Angriffen ausgesetzt. Dies Prinzip gilt also stets, wenn nur ein Symmetriequadrupel vorhanden ist; die übrige Konfiguration kann ganz beliebig sein. Ja, wir können noch mehr sagen: Unsere Schlußweise überträgt sich offenbar

sofort auf den Fall, daß die 4 Königinnen nicht in bezug auf das ganze Brett, sondern in bezug auf irgendein quadratisches Gebiet innerhalb desselben, dieses mag am Rande oder irgendwo im Innern liegen, ein Symmetriequadrupel bilden. Es mag hier gleich ein konkretes Beispiel zugrunde gelegt werden: Denken wir uns in Fig. 22 die 7 schraffierten und die 4 mit Kreuzen bezeichneten Felder mit Königinnen besetzt, so haben wir eine Lösung[1]) unseres Problems für $n = 11$. Die 4 mit Kreuzen bezeichneten Königinnen gehen nun freilich bei

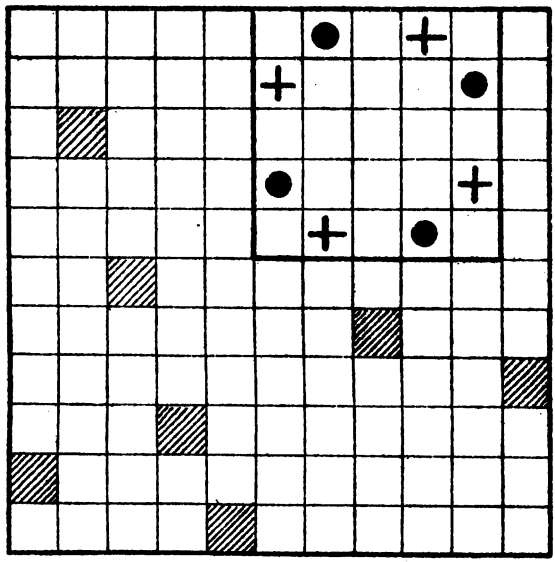


Fig. 22 ($n = 11$).

Drehungen des ganzen Bretts nicht in sich über, wohl aber, wenn wir uns das in der Figur abgegrenzte 25-feldrige Brett gedreht denken; in bezug auf dieses bilden die 4 Kreuze also ein Symmetriequadrupel, dessen Spiegelbild auf dem 25-feldrigen Gebiet wir durch Kreise gekennzeichnet haben. Wir wollen

1) Ich entnehme diese Lösung aus der hier nicht abgedruckten Kopfermannschen Tabelle der 341 Lösungen für $n = 11$ (s. S. 229, Anm. 1); für $n < 11$ scheinen derartige Lösungen nicht zu existieren.

solche Lösungen wie die der Fig. 22, die nur in einem Teil der Figur und eventuell auch nur in bezug auf einen Teil des Brettes Symmetrie zeigen, etwa „partiell-symmetrische" nennen. Setzen wir nun die 4 Königinnen von den durch Kreuze bezeichneten Feldern auf die Felder der 4 Kreise, so beherrschen sie insgesamt offenbar dieselben Zeilen, Kolonnen und diagonalgerichteten Linien wie zuvor. Zunächst gilt dies nach unserer obigen „Bemerkung" freilich nur innerhalb des 25-feldrigen Gebiets; da wir uns aber die betreffenden horizontalen, vertikalen und diagonalgerichteten Linien nur verlängert zu denken brauchen, so gilt es offenbar auch für das ganze Brett. Die 4 Königinnen auf den Plätzen der Kreise greifen also die 7 der schraffierten Felder auch nicht an, d. h. bilden mit ihnen gleichfalls eine Lösung unseres Problems für $n = 11$. Wir sprechen unser Resultat so aus:

Satz 2: *Bilden in einer Lösung des Königinnenproblems 4 Königinnen ein Symmetriequadrupel, sei es in bezug auf das ganze Brett, sei es in bezug auf irgendein quadratisches Gebiet desselben, und ersetzt man innerhalb des Gebietes, für das die Symmetrie besteht, das Quadrupel durch sein Spiegelbild, so erhält man auf dem ganzen Brett wieder eine Lösung des Königinnenproblems.*

Bei den doppelt-symmetrischen Lösungen unseres Problems, denen wir uns jetzt wieder zuwenden wollen, haben wir nun — abgesehen von einer Königin auf dem Mittelfeld — lediglich Symmetriequadrupel und wir gewinnen daher jetzt sofort folgendes Resultat:

Satz 3: *Aus einer doppelt-symmetrischen Lösung erhält man eine neue doppelt-symmetrische Lösung nicht nur, wenn man die ganze Konfiguration, sondern auch, wenn man nur ein oder mehrere Quadrupel von zusammengehörigen Königinnen für sich an einem Rand des Brettes spiegelt.*

Hierdurch ist man nun in den Stand gesetzt, auch für größere Felderzahl die doppelt-symmetrischen Lösungen verhältnismäßig leicht zu bestimmen, nämlich etwa folgender maßen: Gibt n, geteilt durch 4, den Rest 1, so setzt man

zunächst die Ziffer $\frac{n+1}{2}$ in die Mitte auf Platz $\frac{n+1}{2}$. Die übrigen $n-1$ oder, wenn n durch 4 teilbar ist, alle n Ziffern werden nun zu Quadrupeln angeordnet. Auf den ersten Platz kann 1 jedenfalls nicht kommen, wie überhaupt in symmetrischen Lösungen Diagonalfelder, mit Ausnahme des Mittelfeldes bei ungeradem n, offenbar nie besetzt sein können, da sich die symmetrisch zugeordneten Königinnen angreifen würden. Wir dürfen uns ferner auf diejenigen Fälle beschränken, wo an erster Stelle eine Zahl steht, die $< \frac{n+1}{2}$ ist, weil andernfalls an letzter Stelle eine solche Zahl stehen würde (s. Satz 1, S. 250) und wir das betreffende Quadrupel also nur zu spiegeln brauchten, um jene Zahl nach vorn zu bringen.

Unter Berücksichtigung dieser Momente und des S. 244 angegebenen Kriteriums bezüglich der Läufergangart, daß nämlich die absolute Differenz zweier Zahlen nie gleich der ihrer Platznummern sein darf, erniedrigt sich die Zahl der Möglichkeiten sehr, so daß es verhältnismäßig schnell gelingt, die doppelt-symmetrischen Lösungen zu finden. Ist $n = 4m$, so lassen sich aus jeder Lösung durch Spiegelung von einzelnen oder allen Quadrupeln im ganzen $2^m - 1$ neue Lösungen herleiten, ebenso wenn $n = 4m + 1$ ist. Beispielshalber habe ich die doppelt-symmetrischen Lösungen bestimmt für $n = 12, 13, 16$ und 17 und teile im folgenden von je 2^m zusammengehörigen eine „Stammlösung" mit, wie wir auch jetzt die Repräsentanten der ganzen — gegenüber der früheren erweiterten — Gruppe nennen wollen

I) $n = 12$: eine Stammlösung.

5, 3, 11, 6, 12, 9, 4, 1, 7, 2, 10, 8

8 Lösungen.

II) $n = 13$: eine Stammlösung

3, 6, 13, 5, 10, 12, 7, 2, 4, 9, 1, 8, 11

8 Lösungen.

III) $n = 16$: 4 Stammlösungen.

1) 4, 8, 5, 16, 14, 7, 11, 15, 2, 6, 10, 3, 1, 12, 9, 13
2) 5, 7, 4, 14, 16, 8, 15, 11, 6, 2, 9, 1, 3, 13, 10, 12
3) 7, 3, 15, 6, 8, 13, 16, 12, 5, 1, 4, 9, 11, 2, 14, 10
4) 8, 6, 4, 14, 7, 15, 12, 16, 1, 5, 2, 10, 3, 13, 11, 9

64 Lösungen.

IV) $n = 17$: 8 Stammlösungen.

1) 3, 5, 17, 8, 16, 7, 12, 14, 9, 4, 6, 11, 2, 10, 1, 13, 15
2) 3, 7, 17, 8, 6, 13, 16, 14, 9, 4, 2, 5, 12, 10, 1, 11, 15
3) 4, 6, 8, 17, 7, 16, 13, 15, 9, 3, 5, 2, 11, 1, 10, 12, 14
4) 4, 8, 5, 17, 15, 7, 12, 16, 9, 2, 6, 11, 3, 1, 13, 10, 14
5) 6, 8, 5, 7, 15, 17, 14, 16, 9, 2, 4, 1, 3, 11, 13, 10, 12
6) 7, 3, 16, 6, 8, 14, 17, 13, 9, 5, 1, 4, 10, 12, 2, 15, 11
7) 7, 5, 8, 6, 16, 14, 17, 15, 9, 3, 1, 4, 2, 12, 10, 13, 11
8) 8, 6, 4, 15, 7, 16, 13, 17, 9, 1, 5, 2, 11, 3, 14, 12, 10

128 Lösungen.

Will man nach dieser Liste z. B. aus der für $n = 13$ angegebenen Stammlösung die übrigen 7 Lösungen herleiten, so hat man nur zu beachten, daß die Zahl 1 mit der an erster Stelle stehenden Zahl, also mit 3, zu einem Quadrupel gehört und weiter die beiden Zahlen, die jene zu $n + 1$, d. h. 14, ergänzen, also 13 und 11; ebenso bilden 2, 6, 12, 8 ein Quadrupel und desgleichen 4, 5, 10, 9, während 7, die Königin des Mittelfeldes, isoliert und invariant dasteht. Wenn wir also die 3 Quadrupel bzw. durch die Buchstaben a, b, c andeuten und die Königin des Mittelfeldes mit M bezeichnen, so schreibt sich unsere obige Lösung

in der Form:
$$\begin{matrix} 3, & 6, & 13, & 5, & 10, & 12, & 7, & 2, & 4, & 9, & 1, & 8, & 11 \\ a, & b, & a, & c, & c, & b, & M, & b, & c, & c, & a, & b, & a\,. \end{matrix}$$

Durch Spiegelung einer oder mehrerer Quadrupel erhalten wir nun die derivierten Lösungen, so z. B. durch Spiegelung von b

3, 8, 13, 5, 10, 2, 7, 12, 4, 9, 1, 6, 11

oder durch Spiegelung von a und b

11, 8, 1, 5, 10, 2, 7, 12, 4, 9, 13, 6, 3. —

Wir bilden die erstere dieser beiden Lösungen in Fig. 23 ab, daneben in Fig. 24 eine der Lösungen von Nr. 5 des Falles $n = 17$.

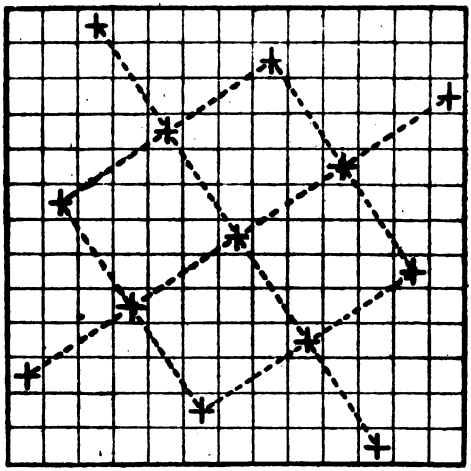


Fig. 23 ($n = 13$).

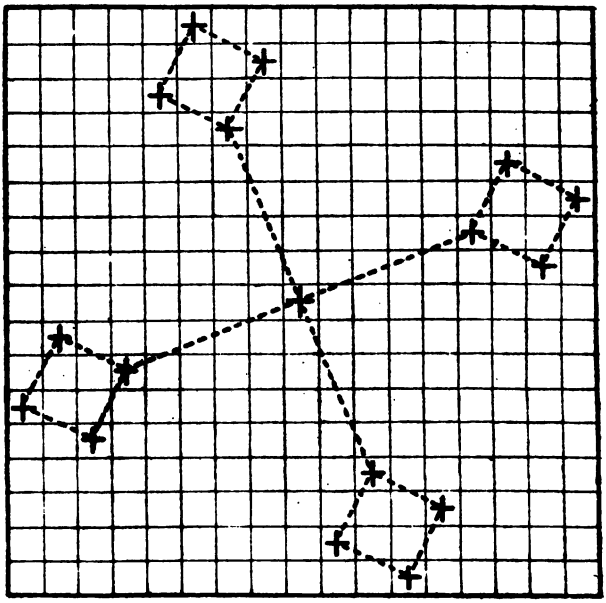


Fig. 24 ($n = 17$).

§ 9. Die entsprechenden Probleme für die übrigen Figuren des Schachspiels. Anzahl der Lösungen für die Turm- und Läuferprobleme.

Les fous sont aux echets les plus prochez des Roys.
Mathurin Regnier, Satyre XIII.
Oeuvres complètes, éd. par E. Courbet, Paris 1875, p. 115.

Wenn auch für das Problem der n Königinnen ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Anzahl der Lösungen, wie wir sahen[1]), bisher noch aussteht, so ist jene Anzahlbestimmung doch für Turm und Läufer — die beiden Komponenten der Königin, wenn wir so sagen dürfen — ausführbar.

8 Türme auf dem Schachbrett aufzustellen, ohne daß einer den anderen schlagen kann, ist, wie schon oben (S. 241) gesagt, natürlich nur so möglich, daß in jeder Zeile wie Kolonne je ein Turm steht, mithin auf so viele Arten, als die Zahlen 1, 2, . . 8 sich in verschiedener Reihenfolge schreiben lassen, d. h. auf $8! = 40320$ Arten, allgemein bei einem Brett von n^2 Feldern auf $n!$ Arten.[2])

Es sei gestattet, zu dem Problem der n Türme noch eine Zusatzbemerkung zu machen, um auf eine Beziehung zu einem in einem späteren Kapitel (XII in Bd. II) unseres Buches zu behandelnden Gegenstande hinzuweisen: Denken wir uns die Brettfelder fortlaufend numeriert, wie in Fig. 25 etwa, und denken wir uns auf dem Brett n Türme ohne gegenseitigen Angriff auf-

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Fig. 25.

1) Siehe S. 232.

2) Anzahlbestimmungen für besondere Kategorien von Lösungen, wie z. B. die der symmetrischen usw., findet man bei Lucas, „Sur l'Arith-

gestellt, so sind wir in der Lage, ohne Ansehen der Felder sofort die Summe der Nummern der 8 besetzten Felder anzugeben. Diese Summe ist nämlich für alle Stellungen dieselbe; es ist gerade die bei den magischen Quadraten auftretende „Konstante", für das 64-feldrige Brett die Zahl 260. Wenn wir uns der Ausdrucksweise jenes Kapitels hier bereits bedienen dürfen, so folgt die angegebene Tatsache sofort daraus, daß in jeder Lösung des Turmproblems offenbar jeder „Einer" und jeder „n-er" gerade einmal vorkommt.[1])

Mit dieser Zwischenbemerkung verlassen wir das Turmproblem und richten demzufolge naturgemäß unser Augenmerk auf die andere „Komponente" der Königin, den **Läufer.** Hier bemerken wir zunächst, daß der Läufer im Vergleich mit Turm und Königin den Vorzug genießt, daß von seiner Art mehr als 8 Figuren ohne gegenseitigen Angriff auf dem Schachbrett aufgestellt werden können; braucht man doch nur auf jeder der 2 Randzeilen je 7 Felder so zu besetzen, daß zwei benachbarte Eckfelder frei bleiben, um so eine Stellung mit 14 Läufern zu erhalten, von denen keiner den anderen schlagen kann. 14 ist übrigens die Maximalzahl, wie leicht zu sehen ist und wie weiterhin (S. 271/2) auch für den allgemeinen Fall bewiesen werden wird. — Unser Interesse nimmt jedoch vorerst weniger die

---

métique figurative", Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. XII, Congrès de Rouen 1883, p. 83—97 (vgl. auch „Récréations mathématiques", t. I, p. 226—227); s. ferner hier S. 232, Anm. 3. Für r Türme auf einem rechteckigen Brett von $p \cdot q$ Feldern $\left(r \leqq \frac{p}{q}\right)$ s. Lucas, „Théorie des nombres", Paris 1891, p. 98.

1) Für die Lösungen des Königinnenproblems, deren jede zugleich natürlich auch eine Lösung des Turmproblems darstellt, gilt das hier Gesagte infolgedessen auch. Auf das Auftreten der magischen „Konstanten" in den Lösungen des Vierköniginnenproblems machte z. B. Geo. E. Carpenter aufmerksam (The British Chess Magazine, XX, 1900, p. 45; s. a. ebendort p. 47). Sodann hat die Spielwarenfirma Carl Quehl-Nürnberg ein lediglich hierauf beruhendes Spiel mit dem Fall des gewöhnlichen Schachbretts auf den Markt gebracht („Die magische 260", D.R.G.M. 379788).

Aufstellung einer solchen Überzahl von Läufern als vielmehr der dem Königinnenproblem entsprechende Fall der 8 in Anspruch, und wir erheben auch hier die Frage nach der Anzahl der verschiedenen Lösungen. Die Beantwortung dieser Frage ist jedoch erheblich schwieriger als die der entsprechenden für den Turm. Sie wird uns daher länger beschäftigen, und wir wollen deshalb zuvor die übrigen bisher nicht beachteten Figuren des Schachspiels abtun, wobei wir uns, der am Kopfe unseres Paragraphen stehenden Devise gemäß, vom Läufer zunächst zur Hauptfigur des Spiels wenden: *Von Königen kann man auf dem Schachbrett ohne gegenseitigen Angriff höchstens 16 aufstellen*, wie sehr leicht zu sehen, z. B. in der Stellung $a1$, $c1$, $e1$, $g1$, $a3$, $c3$, $e3$, $g3$, $a5$, $c5$, $e5$, $g5$, $a7$, $c7$, $e7$, $g7$. Bei dieser Stellung bleibt die ganze Kolonne h und ebenso die ganze Zeile 8 frei; man kann also auch bereits auf einem Brett von 7^2 Feldern 16 Könige ohne gegenseitigen Angriff aufstellen. In diesem Falle ist die angegebene Stellung offenbar die einzige dieser Art, während es für das gewöhnliche Schachbrett zahlreiche Lösungen unseres Problems gibt. Allgemein lassen sich auf einem Brett von n^2 Feldern bei ungeradem $n = 2m - 1$ ohne gegenseitigen Angriff offenbar m^2 Könige aufstellen (eine Lösung), bei um 1 größerem, geradem $n = 2m$ dagegen auch nur m^2 (viele Lösungen).[1])

Wenden wir uns nun dem analogen Problem des Springers

---

1) Die Zahlen, die R. de Montessus im Intermédiaire des mathématiciens, t. IV, 1897, p. 40 für die Anzahl der Lösungen bei geradem n (angeblich allgemein 4 oder 8 Lösungen) gibt, sind unrichtig. Tatsächlich ist diese Anzahl sehr viel größer und wächst offensichtlich mit n; für $n = 4$ gibt es beispielsweise bereits 14 Stammlösungen, von denen 7 unsymmetrisch, 5 einfach- und je eine doppelt- und dreifach-symmetrisch sind, zusammen also 79 Lösungen. — Die Frage im „Intermédiaire" war so gefaßt: „Wieviele Felder auf dem Schachbrett darf man höchstens anstreichen, wenn zwei angestrichene Felder keinen Punkt gemeinsam haben sollen? Wieviele Lösungen gibt es für ein gegebenes Maximum?" (Interméd., t. III, 1896, p. 175: Question 873). Offenbar ist dieses Problem mit dem unsrigen identisch.

zu, so haben wir zunächst zu bemerken, daß man von Figuren dieser Art jedenfalls 32 ohne gegenseitigen Angriff auf dem Schachbrett aufstellen kann, nämlich auf den 32 Feldern derselben Farbe. Denn bekanntlich wechselt der Springer bei jedem Zuge die Farbe[1]); sind also z. B. alle 32 weißen Felder mit Springern besetzt, so greift keiner von diesen einen der anderen 31 an. Neben den 32 weißen Feldern auch noch eins oder mehrere der schwarzen Felder zu besetzen, geht jedoch nicht an; denn unsere auf den 32 weißen Feldern aufgestellten Springer beherrschen alle schwarzen Felder. Da man nämlich von jedem Felde mindestens 2 Springerzüge tun kann[2]), so muß man von jedem schwarzen Feld zu mindestens 2 weißen Feldern, also auch, da jeder Zug umkehrbar ist, *zu* jedem schwarzen Feld von mindestens 2 weißen Feldern aus durch Springerzug gelangen können. — Wir behaupten nun, daß auch durch Kombinationen von schwarzen mit weißen Feldern keine einzige Stellung von mehr als 32 oder auch nur von 32 Springern ohne Angriff erhalten werden kann, daß mithin die 32 Springer aller weißen Felder einerseits und die der 32 schwarzen Felder andererseits die einzigen Lösungen des Springer-Maximalproblems darstellen. Wir wollen dies streng beweisen, indem wir unserer Behauptung zuvor folgende allgemeinere Fassung geben: *Abgesehen von einem Brett von 2^2 Feldern, wo 4 Springer möglich sind, sind allgemein auf einem Brett von n^2 Feldern* $\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$ *Springer ohne Angriff im Maximum möglich,* wobei durch die eckige Klammer angedeutet werden soll, daß bei gebrochenem Wert die zu dem Bruch nächst kleinere ganze Zahl zu nehmen ist. Um nun zu beweisen, daß dies wirklich die Maximalzahl ist, wollen wir hier aus Kap. XI, § 9 resp. § 12, bereits die Tatsache vorwegnehmen, daß es für $n \geqq 5$ stets möglich ist, alle n^2 Felder hintereinander mit dem Springer je einmal zu passieren. Eine solche Kette der n^2 Felder, „Rösselsprung" genannt, denken wir uns

1) Vgl. bezüglich Gangart und Farbenwechsel Kap. XI, § 2.
2) Vgl. Kap. XI, § 2.

angegeben. Sind nun auf unserem Brett a Felder mit Springern besetzt, ohne daß einer von diesen den anderen angreift, so können von diesen a Feldern niemals 2 in dem Rösselsprunge einander benachbart sein, da ja sonst ein Übergang mittels Springerzuges zwischen ihnen möglich wäre, mithin ein gegenseitiger Angriff bestände. Es muß also in dem Rösselsprung zwischen je zweien der a Felder immer mindestens ein anderes Feld sich befinden, das erst den Übergang zwischen jenen vermittelt. Die Zahl der unbesetzten Felder muß also wenigstens entweder gleich der der besetzten oder gleich der um 1 verminderten Anzahl dieser sein, dies letztere nämlich dann, wenn *beide* Endfelder des Rösselsprungs zu den a besetzten Feldern gehören, was übrigens nur bei ungeradem n möglich ist, während bei geradem n also die Zahl der unbesetzten Felder mindestens gleich der der besetzten ist. Damit ist erwiesen, daß $a \leqq \left[\frac{n^2+1}{2}\right]$ sein muß, wie angegeben. Da diese Maximalzahl dann und nur dann erreicht wird, wenn zwischen zwei der besetzten Felder in dem Rösselsprung sich immer nur ein unbesetztes einschiebt, so folgt wegen des mit jedem Springerzuge verbundenen Farbenwechsels (s. oben) weiter, daß diese $\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$ Felder alle von derselben Farbe sein müssen. Von den noch ausstehenden Fällen $n < 5$ ist der Ausnahmefall $n = 2$ mit 4 Springern bereits oben erledigt, während die Fälle $n = 3, 4$, in denen ein vollständiger Rösselsprung zwar nicht existiert, sich dennoch nach dem eben benutzten Prinzip erledigen und gleichfalls $\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$ zur Maximalzahl besitzen. Man bedenke nämlich, daß für $n = 3$ die 8 Randfelder sich mittels Springerzüge zu einer Kette zusammenfassen lassen (s. in Kap. XI das Innere von Fig. 40) und daß für $n = 4$ dasselbe mit 12 der 16 Felder einerseits und den 4 übrigen andererseits möglich ist (s. in Kap. XI das Innere von Fig. 34, wo die 4 Felder verbunden sind und die übrigen 12 sich leicht verbinden lassen, indem man erst die vier a', dann die c' und hierauf die e' nimmt). Daraus folgt offenbar, daß für $n = 3$ bezüglich der Anzahl der Springer ohne Angriff die obere Grenze 5 und für $n = 4$ dieselbe 8 ist. Diese oberen

Grenzen werden aber wirklich erreicht, da so viele gleichfarbige Felder vorhanden sind. Die Gleichfarbigkeit der Felder ist jedoch hier nur hinreichend, nicht notwendig, um die Maximalzahl wirklich zu bekommen; man kann ja für $n = 3$ einen Springer auf das Mittelfeld und 4 auf die andersfarbigen Mittelrandfelder setzen, so daß also die Maximalzahl $\frac{n^2+1}{2} = 5$ auch so erreicht wird. In dem Fall $n = 4$ kann man ferner — dem obigen Räsonnement entsprechend — zunächst versuchen, von der Kette der 12 Felder etwa die 6 weißen und von der der 4 Felder die 2 schwarzen mit Springern zu besetzen. Dann sind von den weißen Feldern nur noch 2 unbesetzt, und diese allein dürfen von den besetzten schwarzen Feldern aus durch Springerzug erreichbar sein. Die besetzten schwarzen Felder dürfen also höchstens je 2 Ausgänge besitzen und müssen daher notwendig die beiden Eckfelder sein. In der Tat ist eine solche Aufstellung möglich, wenn die 2 leeren weißen Felder $b3$ und $c2$ (s. etwa Fig. 1, S. 214) sind.

Wir wenden uns nunmehr wieder dem „Läuferproblem" zu, d. h. der Frage: **Auf wieviele Arten lassen sich 8 Läufer ohne gegenseitigen Angriff auf dem gewöhnlichen Schachbrett aufstellen?** Die Bestimmung dieser Anzahl ist von J. Perott[1]) gegeben worden, dessen Methode wir im folgenden wiedergeben wollen: Die Aufgabe für die Läufer unterscheidet sich von den entsprechenden für Königin und Turm insofern wesentlich, als wir hier gewissermaßen 2 Arten von Figuren haben, die „schwarzen" und die „weißen" Läufer, d. h. die auf schwarzen resp. weißen Feldern stehenden Läufer, von denen niemals einer einen der anderen Kategorie schlagen kann. Unserer Aufgabe, 8 sich nicht schlagende Läufer auf dem Schachbrett aufzustellen, können wir uns daher in der Weise entledigen, daß wir entweder 7 weiße[2]) und einen schwarzen oder 6 weiße und 2 schwarze usw. aufstellen. Die Gesamtzahl aller dieser Möglichkeiten ist die zu bestimmende Anzahl. Die Zahl der weißen Felder für sich, wie auch die der schwarzen Felder beträgt 32. Denken wir uns nun das Schachbrett schräg so vor uns gelegt, daß wir in der Richtung der weißen Diagonale sehen, so bilden die 32 weißen Felder die von nachstehenden Kreuzen gebildete Figur:

---

1) Bulletin de la soc. mathém. de France, t. XI, 1883, p. 173—186.

2) Daß mehr als 7 gleicher Farbe ohne Angriff nicht möglich sind, ist leicht zu sehen; s. a. S. 271/2, sowie S. 260.

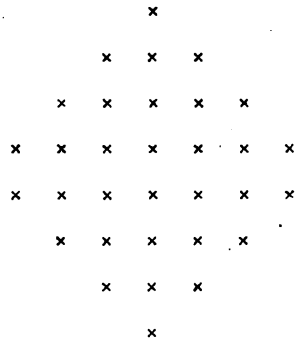


Fig. 26.

Anstatt nun zu fragen: Auf wieviel Arten lassen sich 7, 6, . . . 1 Läufer auf den 32 weißen Feldern des Schachbretts aufstellen, ohne sich zu schlagen? — können wir jetzt die Frage offenbar auch so stellen: Auf wieviel Arten lassen sich 7, 6, . . 1 Türme auf den 32 Feldern der Fig. 26 aufstellen, ohne daß einer den anderen schlägt? Dieses Brett der 32 Felder denken wir uns zunächst zu einem rechteckigen vervollständigt, indem wir 4-mal je 6 Felder ansetzen. Wir deuten diese neuen Felder durch Punkte an, wie wir überhaupt in der Folge verschiedene Zeichen für die Felder gebrauchen und hierbei kurz nur von „Punkten", „Kreisen" oder „Kreuzen" sprechen werden. Wir kommen so zu einem Brett von 56 Feldern:

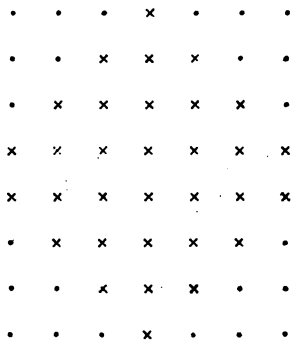


Fig. 27.

Wir wollen uns nun allgemein ein rechteckiges Brett von $p \cdot q$ Feldern in 2 Teile A und B (in unserem Fall der Fig. 27: einmal die Gesamtheit der 32 alten Felder und zum anderen die 24 neu hinzugekommenen) geteilt denken und die Anzahl der Möglichkeiten, auf dem Teile A

i sich nicht schlagende Türme aufzustellen, mit A_i und die entsprechende Anzahl für B mit B_i und schließlich die Anzahl der Möglichkeiten, auf A s Türme und auf B zugleich deren t aufzustellen, ohne daß einer der $s+t$ den anderen schlägt, mit dem Symbol $A_s B_t$ bezeichnen. Es seien nun auf dem Brett im ganzen k sich nicht schlagende Türme aufgestellt ($k \leqq p \leqq q$) und zwar auf B deren r und auf A die übrigen $k-r$, was auf $A_{k-r} B_r$ Arten nach unserer Bezeichnung möglich ist. Diese k Türme beherrschen k Zeilen und k Kolonnen; es bleiben also noch $(p-k)(q-k)$ Felder des Bretts übrig, die von ihnen nicht beherrscht sind. Wollen wir also noch einen $(k+1)$ten Turm auf dem Brett aufstellen, so stehen uns hierfür $(p-k)(q-k)$ Felder zur Verfügung, und wir erhalten so aus jeder Stellung der k Türme $(p-k)(q-k)$ Stellungen mit $(k+1)$ Türmen, im ganzen also $(p-k)(q-k) A_{k-r} B_r$ solche Stellungen, die jedoch keineswegs alle verschieden sind. Der $(k+1)$te Turm steht entweder auf A oder auf B, und offenbar bekommen wir so zunächst alle $A_{k-r+1} B_r$ Stellungen mit $(k-r+1)$ Türmen auf A und mit r auf B, und zwar erscheint jede Stellung dabei $(k-r+1)$-mal, da ja jeder der $(k-r+1)$ Türme von A der $(k+1)$te, zuletzt hinzugekommene sein konnte; wir erhalten weiter alle $A_{k-r} B_{r+1}$ Stellungen mit $(k-r)$ Türmen auf A und $(r+1)$ auf B und zwar jede dieser Stellungen $(r+1)$-mal, so daß offenbar die Gleichung besteht:

$$(p-k)\cdot(q-k)\cdot A_{k-r} B_r = (k-r+1)\cdot A_{k-r+1} B_r + (r+1)\cdot A_{k-r} B_{r+1}.$$

Diese Rekursionsformel liefert, wenn alle A_i bekannt sind, aus diesen und dem trivialen Wert von B_1 sukzessive alle B_i und alle $A_s B_t$, wie wir auch weiter unten noch sehen werden.

Die von Perott angewandte Methode besteht nun darin, aus einem verhältnismäßig einfachen Teil A, für den die A_i leicht zu bestimmen sind, und einem anderen Teil B ein rechteckiges Brett zusammenzusetzen, hieraus für B die betreffenden Anzahlen zu bestimmen und mit ihm (B) dann eventuell wieder ein weiteres rechteckiges Brett zusammenzusetzen usf., so zwar, daß man schließlich zu dem verlangten, d. h. also hier zu dem der Fig. 27, kommt.

Wir ziehen es jedoch vor, diese Methode zunächst an ganz einfachen Fällen auseinanderzusetzen, und wählen daher ein Schachbrett von 16 Feldern mit der Aufgabe, 4 sich nicht schlagende Läufer darauf aufzustellen. Die 8 Felder gleicher Farbe bilden, in der Diagonalenrichtung angesehen, die Figur:

Fig. 28.

Diese Figur vervollständigen wir zu einer rechteckigen durch Hinzunahme von 4 Feldern (Punkten) und wenden auf die so sich ergebende Fig. 29 unsere Rekursionsformel an.

Fig. 29.

Bezeichnen wir das Gebiet der Kreuze mit B, das der Punkte mit A und beachten, daß $A_1 = 4$; $A_2 = 2$; $A_3 = 0$; $A_4 = 0$; $B_1 = 8$ ist, so liefert unsere Rekursionsformel für $k = 1$; $r = 0, 1$ die Gleichungen:

$$2 \cdot 3 \cdot A_1 = 2 A_2 + A_1 B_1$$
$$2 \cdot 3 \cdot B_1 = A_1 B_1 + 2 B_2,$$

also $A_1 B_1 = 20$; $B_2 = 14$. Auf den 8 Kreuzen lassen sich also 2 Türme, ohne sich zu schlagen, auf 14 verschiedene Arten aufstellen, wie man übrigens natürlich auch leicht durch direkte Abzählung feststellt. — Für $k = 2$; $r = 0, 1, 2$ erhalten wir die Gleichungen:

$$2 A_2 = 3 A_3 + A_2 B_1$$
$$2 A_1 B_1 = 2 A_2 B_1 + 2 A_1 B_2$$
$$2 B_2 = A_1 B_2 + 3 B_3,$$

also $A_2 B_1 = 4$; $A_1 B_2 = 16$; $B_3 = 4$. — 3 Türme lassen sich also nur auf 4 verschiedene Arten auf den 8 Kreuzen aufstellen, ein Resultat, das wir allerdings sehr viel schneller direkt abgeleitet hätten und das wir hier nur zur Illustration der Methode aus der Rekursionsformel geschöpft haben. Wir rekapitulieren: $B_1 = 8$; $B_2 = 14$; $B_3 = 4$. Die Aufgabe der 4 Läufer für das 16-feldrige Brett kann nun in der Weise gelöst werden, daß 3 auf die weißen und 1 auf die schwarzen Felder resp. umgekehrt gesetzt werden oder aber je 2 auf jede Farbe kommen. Wir erhalten so im ganzen $2 \cdot 4 \cdot 8 + 14 \cdot 14 = 260$ Lösungen.

Auf einem Brett von 16 Feldern kann man aber in maximo 6 sich nicht schlagende Läufer unterbringen; für den Fall von 5 Läufern erhält man $2 B_2 \cdot B_3 = 112$ und für den der 6 Läufer $B_3 \cdot B_3 = 16$ Lösungen.

Wir betrachten sodann noch den Fall eines ungeraden n, nämlich $n = 5$, wo im Gegensatz zu dem Fall eines geraden n die Felder der beiden Farben nicht mehr in gleicher Anzahl auf dem Brett vorkommen. Sind die Eckfelder etwa weiß, so haben wir 13 weiße und 12 schwarze

Felder. Die weißen bilden das durch Fig. 30 dargestellte Gebiet, das wir durch Ansetzen von 12 neuen Feldern (Punkten) zu einem Quadrat vervollständigen (s. Fig. 31).

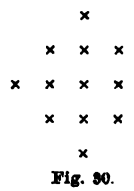


Fig. 30.

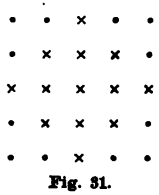


Fig. 31.

Das Gebiet der Kreuze bezeichnen wir mit X, das der Punkte mit B. Um nun zunächst die für die Berechnung der Größen X_i erforderlichen B_i zu bestimmen, gehen wir zu dem Brett der Fig. 32 über, von

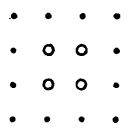


Fig. 32.

dem B ein Teil ist, während wir für den anderen, A (Kreise), sofort angeben können: $A_1 = 4$; $A_2 = 2$; $A_3 = A_4 = 0$. Da $B_1 = 12$ ist, so ergibt sich für $k = 1$; $r = 0, 1$ aus der Rekursionsformel:

$$9A_1 = 2A_2 + A_1B_1$$
$$9B_1 = A_1B_1 + 2B_2,$$

also $A_1B_1 = 32$; $B_2 = 38$. Auf 38 Arten lassen sich also auf dem Gebiet der 12 Punkte 2 sich nicht schlagende Türme aufstellen. Für $k = 2$; $r = 0, 1, 2$ erhält man:

$$4A_2 = 3A_3 + A_2B_1$$
$$4A_1B_1 = 2A_2B_1 + 2A_1B_2$$
$$4B_2 = A_1B_2 + 3B_3,$$

also $A_2B_1 = 8$; $A_1B_2 = 56$; $B_3 = 32$. — Schließlich ergibt sich und zwar am schnellsten durch direkte Betrachtung: $B_4 = 4$. Sollen nämlich auf die Punkte der Fig. 32 vier sich nicht schlagende Türme gestellt werden, so muß in der zweiten Zeile jedenfalls einer stehen, was 2 Möglichkeiten gibt. Nachdem aber das betreffende Feld gewählt ist, ist auch über das der dritten Zeile mit entschieden, und es bleiben für die anderen beiden Türme noch die Mittelfelder der ersten und letzten Zeile, was wieder je 2 Möglichkeiten gibt.

Nachdem wir so $B_1 = 12$; $B_2 = 38$; $B_3 = 32$; $B_4 = 4$ bestimmt haben, wenden wir uns der Fig. 31 wieder zu, für deren Gebiet B die

an Fig. 32 gefundenen Werte der B_i ohne weiteres Gültigkeit haben, wie leicht einzusehen. Wir können also jetzt, wo die B_i bekannt sind, mittels der Rekursionsformel die X_i bestimmen; wir verzichten jedoch auf eine genaue Wiedergabe der einzelnen Gleichungen und beschränken uns auf die Angabe der Resultate, nämlich: $X_1 = 13$; $X_2 = 46$; $X_3 = 46$; $X_4 = 8$. Sodann betrachten wir das Gebiet der schwarzen Felder unseres 25-feldrigen Brettes; Fig. 33 stellt dieses mit Y zu bezeichnende Gebiet dar. Man sieht, daß die Y_i mit den B_i in Fig. 32 übereinstimmen müssen, da ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Gebieten nicht

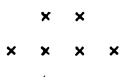


Fig. 33.

besteht, indem beide durch Hinzunahme desselben Gebietes von 4 Feldern zu einem Quadrat von 16 Feldern ergänzt werden; es ist also $Y_1 = 12$; $Y_2 = 38$; $Y_3 = 32$; $Y_4 = 4$. Die Anzahl der Lösungen unseres Fünfläufer-Problems für 25 Felder ist somit:

$$X_1 \cdot Y_4 + X_2 \cdot Y_3 + X_3 \cdot Y_2 + X_4 \cdot Y_1 = 3368.$$

Für die Aufstellung von 6 Läufern auf 25 Feldern ergeben sich

$$X_2 \cdot Y_4 + X_3 \cdot Y_3 + X_4 \cdot Y_2 = 1960$$

Möglichkeiten, für die von 7: $X_3 \cdot Y_4 + X_4 \cdot Y_3 = 440$ und für die von 8: $X_4 \cdot Y_4 = 32$.

Für die Fälle $n = 6, 7$, für die ich gleichfalls die Berechnung durchgeführt habe, beschränke ich mich auf kurze Angabe der Resultate für die Aufstellung von n Läufern, d. h. also von 6 resp. 7, ebenso für den Fall $n = 8$, für den man die detaillierte Entwickelung in der oben zitierten Perottschen Arbeit findet.

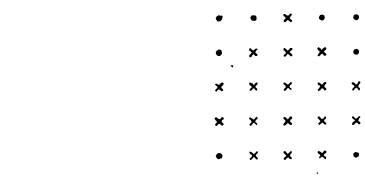


Fig. 34.

Für $n = 6$ schließt sich die Betrachtung an Fig. 34 an, in der das Gebiet X der Kreuze das der 18 Felder der einen Farbe ist, während das andere Gebiet B der Fig. 34 (12 Punkte) wieder mit dem Gebiet B

der Fig. 32 übereinstimmt, so daß die Werte der B_i bereits bekannt sind und hieraus sich leicht: $X_1 = 18$; $X_2 = 98$; $X_3 = 184$; $X_4 = 100$; $X_5 = 8$ ergeben. Die Anzahl der Lösungen für 6 Läufer ist dann 53744.

Für $n = 7$ bilden die Felder der einen Farbe das Gebiet X (Kreuze) der Fig. 35, während der andere Teil B der Fig. 35 (24 Punkte) zu-

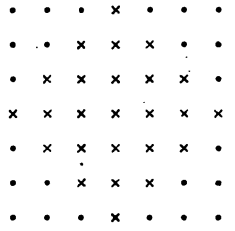


Fig. 35.

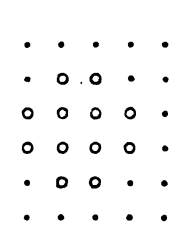


Fig. 36.

nächst an Fig. 36 studiert werden mag, wo er mit dem Gebiet A der 12 Kreise zusammen ein Quadrat bildet. Das Gebiet A der Fig. 36 ist nun wieder identisch mit der Fig. 33 und wir haben daher: $A_1 = 12$; $A_2 = 38$; $A_3 = 32$; $A_4 = 4$, woraus durch Anwendung der Rekursionsformel auf Fig. 36 folgt: $B_1 = 24$; $B_2 = 188$; $B_3 = 576$; $B_4 = 652$; $B_5 = 208$; $B_6 = 8$. Hieraus resultiert dann schließlich: $X_1 = 25$; $X_2 = 206$; $X_3 = 674$; $X_4 = 836$; $X_5 = 308$; $X_6 = 16$. Die

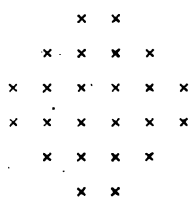


Fig. 37.

Felder der anderen Farbe bilden das Gebiet Y der Fig. 37, das, wie man leicht sieht, nur äußerlich von dem Gebiet B der Fig. 36 verschieden ist. Man erhält also: $Y_1 = 24$; $Y_2 = 188$; $Y_3 = 576$; $Y_4 = 652$; $Y_5 = 208$; $Y_6 = 8$. Die Anzahl der Lösungen für 7 Läufer beträgt daher 1 022 320.

Für $n = 8$ gehen wir auf Fig. 27 mit den beiden Teilen X (32 Kreuze) und B (24 Punkte) zurück. Die B_i sind aus Fig. 36 schon bekannt, und man findet für das Gebiet X der 32 gleichfarbigen Felder des gewöhnlichen Schachbretts:

$$X_1 = 32;\ X_2 = 356;\ X_3 = 1704;\ X_4 = 3532;\ X_5 = 2816;$$
$$X_6 = 632;\ X_7 = 16.$$

Man erhält so *22522960 Möglichkeiten für die Aufstellung von 8 Läufern auf dem gewöhnlichen Schachbrett ohne gegenseitigen Angriff.*

Zum Schluß geben wir noch eine tabellarische Zusammenstellung der Anzahl der Lösungen für die quadratischen Schachbretter von n^2 Feldern von $n = 2$ bis $n = 8$ und zwar für die 3 Probleme der Königin, des Turms und des Läufers und rekapitulieren dabei zugleich aus § 5 (S. 233) die entsprechenden Zahlen für das Hertzsprungsche Turm-König-Problem. Man beachte auch hier die schon oben hervorgehobene merkwürdige Abnahme der Lösungenzahl für das Königinnenproblem von $n = 5$ zu $n = 6$, während für alle drei anderen Probleme auch an dieser Stelle, wie überall sonst mit steigendem n, die Anzahlen der Lösungen wachsen.

	Anzahl der Lösungen für das			
n	Königinnen-Problem	Turm-König-Problem	Turm-Problem	Läufer-Problem
2	0	0	2	4
3	0	0	6	26
4	2	2	24	260
5	10	14	120	3368
6	4	90	720	53744
7	40	646	5040	1022320
8	92	5242	40320	22522960

Dabei besitzt nun, wie schon mehrfach erwähnt, das Läuferproblem noch die Besonderheit, daß n Läufer noch nicht die Maximalzahl auf einem Brett von n^2 Feldern ($n \geqq 2$) repräsentieren. Vielmehr ist diese Maximalzahl erst $2(n-1)$, wie man leicht folgendermaßen erkennt: Denken wir uns alle diejenigen Felder zu einer Klasse zusammengefaßt, die auf derselben Parallelen zu der Diagonale / liegen, so erhalten wir offenbar eine Einteilung aller n^2 Felder in $2n-1$ Klassen (außer der Diagonale / selbst je $n-1$ Klassen auf jeder Seite von ihr). Besetzt man nun ein Feld in jeder Klasse mit einem Läufer, so beherrschen diese offenbar das ganze Brett, so daß also

$2n-1$ jedenfalls eine obere Grenze für unsere gesuchte Zahl bildet. Von diesen Klassen bestehen nun 2 nur aus je einem Feld, es sind dies die beiden Endfelder der Diagonale $\diagdown$; eine Wahl bezüglich des Feldes, um den betreffenden Läufer aufzustellen, ist also bei diesen beiden Klassen ausgeschlossen. Da nun andererseits zwischen diesen beiden letzteren Feldern ein Läuferzug möglich ist, so muß eins derselben leer bleiben. *Man kann also höchstens* $2n-2$ *Läufer aufstellen.* Diese Zahl wird aber wirklich erreicht: man braucht ja nur, wie schon oben (S. 260) gesagt, alle Felder der untersten Zeile und von der obersten alle mit Ausnahme der beiden Eckfelder zu besetzen.

Die Aufstellung dieser $2(n-1)$ Läufer kann auf 2^n Arten geschehen. Bezeichnen wir nämlich das Gebiet der $\frac{n^2}{2}$ gleichfarbigen Felder eines geraden n mit A, so findet man sehr leicht, daß für die $n-1$ Kolonnen von A gilt: $A_{n-1} = 2^{\frac{n}{2}}$, und zwar durch ein Schlußverfahren, wie wir es S. 268 ähnlich an Fig. 32 zur Bestimmung von B_4 (vgl. auch Y_4 an Fig. 33) anwandten. Die Zahl aller Möglichkeiten für $2(n-1)$ Läufer ist also hier $A_{n-1} \cdot A_{n-1} = 2^n$. Bei ungeradem n schließlich zerfällt das Brett der n^2 Felder in ein Gebiet A von $\frac{n^2+1}{2}$ und in ein zweites B von $\frac{n^2-1}{2}$ Feldern, und zwar wird hier gefunden:

$$A_{n-1} = 2^{\frac{n+1}{2}} \quad \text{und} \quad B_{n-1} = 2^{\frac{n-1}{2}},$$

also $A_{n-1} \cdot B_{n-1} = 2^n$.*)

*) Lucas, „Sur l'Arithmétique figurative", Assoc. franç. pour l'avancement des sciences XII, Congrès de Rouen 1883, p. 96/97.

Anhang.

Zugzahlen der verschiedenen Figuren.

A. Gesamtanzahl der Züge der verschiedenen Figuren.

In diesem Abschnitt wollen wir uns damit beschäftigen, **die Gesamtanzahl aller Züge, welche die einzelnen Figuren des Schachspiels auf dem ganzen Brett ausführen können, festzustellen,** wobei zum Schluß eine Anzahlbestimmung sich ergeben wird, die auch für das Königinnen-Problem Interesse hat. Wir beginnen mit der Figur kompliziertester Gangart, dem Springer. Das Schachbrett sei rechteckig, gebildet von p Zeilen und q Kolonnen. Die Züge des Springers[1]) wollen wir unterscheiden als solche „erster Art", wenn die Figur um eine Kolonne und zwei Zeilen, und solche „zweiter Art", wenn sie um zwei Kolonnen und eine Zeile fortschreitet. Zunächst betrachten wir nur die Züge der „ersten Art": Von den Feldern der beiden Randkolonnen können, da nur nach einer Seite hin eine Bewegung möglich ist, zusammen offenbar nur ebensoviele Züge ausgehen, wie von jeder andern einzelnen Kolonne. Wir rechnen daher so, als ob wir im ganzen nur $q-1$ Kolonnen hätten. Von allen Feldern irgendeiner Kolonne zusammengenommen wird man von oben nach unten $p-2$ Springerzüge erster Art nach jeder der beiden Seiten (rechts und links) hin machen können, zusammen also $2(p-2)$, und ebensoviele von unten nach oben hin, im ganzen daher $4(p-2)$, und für alle $q-1$ Kolonnen: $4(p-2)(q-1)$. Dies ist also die Anzahl aller Züge der ersten Art; die der zweiten unterscheiden sich von ihnen durch Vertauschung der Begriffe „Zeile" und „Kolonne", und ihre

1) Bezüglich der Gangart des Springers verweisen wir eventuell auf Kap. XI, § 2, S. 325.

Anzahl ist daher offenbar $4(q-2)(p-1)$. Die Anzahl aller überhaupt möglichen Springerzüge ist also[1]):

$$(1) \qquad 2[(2p-3)(2q-3)-1],$$

speziell für das gewöhnliche Schachbrett 336. Dabei ist der Zug von a nach b als verschieden gerechnet von dem in umgekehrter Richtung, d. h. dem von b nach a.

Fassen wir eine gedachte allgemeinere Figur ins Auge, deren Gangart darin besteht, daß sie sich erst von dem Ausgangsfeld um s Kolonnen nach einer der beiden Seiten fortbewegt und dann in der betreffenden Kolonne um r Zeilen (Züge „erster Art") resp. erst um r Kolonnen und dann um s Zeilen (Züge „zweiter Art"), so erhalten wir die Anzahl der Züge dieser allgemeineren Figur offenbar in ganz analoger Weise. Für die Züge der ersten Art zählen die zweimal s letzten Kolonnen zusammen nur soviel wie s andere Kolonnen; wir dürfen also nur $q-s$ Kolonnen rechnen. Von den Feldern jeder dieser $q-s$ Kolonnen sind zusammen $4(p-r)$ Züge möglich, also im ganzen Züge erster Art

$$4(p-r)(q-s)$$

und Züge beider Arten zusammen[2])

$$(1^a) \qquad 2[(2p-r-s)(2q-r-s)-(r-s)^2].$$

Man sieht leicht, daß, sobald r oder $s=0$ sind oder aber $r=s$ ist, je zwei Züge zusammenfallen und dann von der Zahl (1^a) die Hälfte genommen werden muß.

Die Zahl der Züge des Königs, der bekanntlich auf jedes dem seinigen benachbarte Feld nach allen Seiten hin ziehen darf, ergibt sich aus (1^a) sofort, wenn wir einmal $r=1$, $s=0$ und zweitens $r=1$, $s=1$ setzen, wobei beide Male aber nur die Hälfte von (1^a) zu nehmen ist; wir erhalten so

$$(2) \qquad 2(4pq-3p-3q+2).$$

1) Mathesis V, 1885, p. 35 (J. Neuberg) in Beantwortung einer von Ed. Lucas ibidem, t. III, p. 72 gestellten Frage.

2) Siehe Lucas, „Récréations", t. IV, p. 130.

Für den Turm ergibt sich die gesuchte Zahl am einfachsten direkt, indem man sofort sieht, daß er von jedem Feld auf $p+q-2$ andere ziehen kann, woraus als Gesamtzahl seiner Züge

$$pq(p+q-2) \tag{3}$$

folgt.

Die Anzahl der Züge beider Läufer zusammengenommen auf einem quadratischen Brett von p^2 Feldern ist offenbar gleich der Anzahl, die wir aus der Hälfte von (1^a) erhalten, wenn wir $r=s$ setzen und nun beide Größen alle Werte von 1 bis $p-1$ durchlaufen lassen. Wir bekommen so die Zahl:

$$\sum_1^{p-1}(2p-2r)^2 = 4\sum_1^{p-1}(p-r)^2 = \frac{2p(p-1)(2p-1)}{3},$$

also für jeden der Läufer

$$\frac{p(p-1)(2p-1)}{3} \text{ Züge.} \tag{4}$$

Will man dies Resultat direkt ableiten, so kann man folgendermaßen verfahren: Zunächst fassen wir die Züge beider Läufer, die von den $4(p-1)$ Randfeldern ausgehen, ins Auge. Von jedem derselben aus lassen sich, wie ein Blick auf das Brett sofort zeigt, $p-1$ Züge tun, also im ganzen $4(p-1)^2$. Unter diesen befinden sich nun auch Paare von solchen, die zueinander reziprok sind; es sind natürlich diejenigen Züge, die von einem Randfeld zu einem Randfeld führen. Von jeder der 4 Ecken aus läßt sich nur je ein Randfeld erreichen, dagegen von jedem der anderen $4(p-2)$ Randfelder aus je 2 Randfelder, so daß in unserem obigen Ausdruck $4(p-2)+2$ Paare zueinander reziproker Züge vorkommen. Wenn wir also 2 reziproke Züge wieder für zwei rechnen, so liefert uns das Doppelte des Ausdrucks

$$4(p-1)^2-4(p-2)-2, \text{ d. h. also}$$
$$2[4(p-1)^2-4(p-2)-2],$$

die Zahl aller Züge, die von oder nach einem Randfeld führen. Wir dürfen uns danach für die weitere Berechnung auf die

Züge auf dem Brett der inneren $(p-2)^2$ Felder beschränken und wenden hier nun dasselbe Rässonement an, indem wir die Züge von und nach den Randfeldern dieses reduzierten Brettes bestimmen und dafür die Zahl

$$2[4(p-3)^2-4(p-4)-2]$$

erhalten usf. Durch Addition dieser Ausdrücke erhält man dann, wie eine leichte Rechnung zeigt, sowohl für gerades wie ungerades p die schon auf anderem Wege von uns abgeleitete Zahl (4).

Da die Königin dieselben Züge macht, wie beide Läufer und ein Turm zusammen, so ergibt sich als ihre Anzahl für p^2 Felder aus (3) und (4):

$$\frac{2p(p-1)(5p-1)}{3}. \tag{5}$$

Hiernach[1]) läßt sich leicht folgende schon zu Beginn dieses Abschnitts angekündigte Anzahlbestimmung ausführen: Wieviele Möglichkeiten gibt es, 2 Königinnen auf einem Brett von p^2 Feldern so aufzustellen, daß sie sich gegenseitig nicht schlagen können?

Von allen $\binom{p^2}{2}$ Kombinationen von je 2 Feldern sind nämlich offenbar alle diejenigen auszuscheiden, die zugleich einen Zug der Königin darstellen, wobei jetzt aber zwei zueinander reziproke Züge nur einmal gezählt werden, mithin

$$\frac{p(p-1)(5p-1)}{3}$$ Kombinationen abzuziehen sind.

---

1) In Zusammenhang mit den vorstehenden Anzahlbestimmungen, angewandt auf das gewöhnliche Schachbrett, steht auch eine Note von Em. Lemoine (Assoc. franç. pour l'avancement des sciences 9, 1880, p. 179) über die Frage: Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine aus dem Schachspiel willkürlich herausgegriffene und auf ein willkürlich gewähltes Feld des Schachbrettes gesetzte Figur ein willkürlich bestimmtes anderes Feld beherrscht?

Es bleiben also[1])

$$\frac{p(p-1)(p-2)(3p-1)}{6} \text{ Möglichkeiten.}$$

Für die Aufstellung dreier Königinnen ergeben sich nach E. Landau[2]) folgende Anzahlen: für gerades p:

$$\frac{1}{12}p(p-2)^2(2p^3-12p^2+23p-10),$$

und für ungerades p:

$$\frac{1}{12}(p-1)(p-3)(2p^4-12p^3+25p^2-14p+1).$$

Auch für das Problem des Königs mögen die entsprechenden Formeln noch angegeben werden. Für die Aufstellung zweier Könige auf einem Brett von p^2 Feldern ergeben sich unter Benutzung der Formel (2) sofort

$$\frac{1}{2}(p-1)(p-2)(p^2+3p-2)$$

Möglichkeiten und

$$\frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p^4+3p^3-20p^2-30p+132)$$

für die von 3 Königen.[3])

---

1) Siehe Mantel, „Sur les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan", Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. 12, Congrès de Rouen 1883, p. 171—175.

2) „Über das Achtdamenproblem und seine Verallgemeinerung", Naturw. Wochenschrift XI, 2. Aug. 1896. — Weitere hierhergehörige Formeln, nämlich für 2, 3, 4 Königinnen auf Brettern von bzw. $2\times n$, $3\times n$, $4\times n$ Feldern hatte H. Tarry auf dem Kongreß der Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. zu Limoges 1890 entwickelt (vgl. Lucas, „Récréations", t. I, p. 231); die Formel für 3 Königinnen auf $3\times n$ Feldern war schon vorher gegeben von E. Pauls, Deutsche Schachzeitung, Bd. 29, 1874, p. 261—263. Eine entsprechende Formel für ein Gebiet von $5\times n$ Feldern ist von H. Tarry im Intermédiaire des mathématiciens (Question 605; t. II, 1895, p. 205, wiederholt t. X, 1903, p. 297/298) gefordert, ohne daß jedoch eine Lösung eingegangen ist.

3) E. Landau im Intermédiaire des mathématiciens, t. VIII, 1901, p. 140; die Ableitung der Formel ist der in der „Naturw. Wochenschr." (s. die vorige Anmerkung) für die 3 Königinnen gegebenen analog.

B. Anzahl der Züge der verschiedenen Figuren von den einzelnen Feldern aus.

Wir schließen an die vorstehenden Betrachtungen noch einige Bemerkungen über **die Anzahl der Züge, die für die verschiedenen Figuren von den einzelnen Feldern des gewöhnlichen Schachbretts aus möglich sind:** Der Turm ist die einzige Figur, für welche die Zahl der möglichen Züge stets dieselbe — unabhängig von der Lage des eigenen Feldes — ist, nämlich = 14. Der Läufer hat von jedem Felde des Gebietes I (s. Fig. 38) 13 und von den Feldern der Gebiete II, III, IV

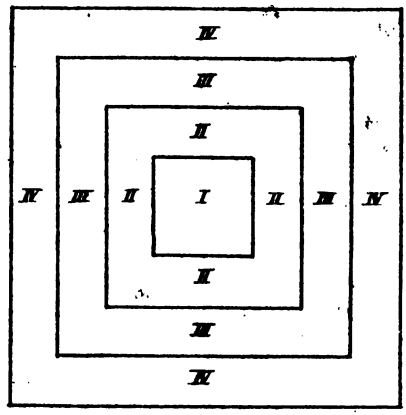


Fig. 38.

bzw. je 11, 9 und 7 Züge, daher die Königin von den Feldern der Gebiete I, II, III, IV resp. 27, 25, 23, 21 Züge. Der König hat auf I, II, III überall 8 Züge und auf IV je 5 mit Ausnahme der 4 Eckfelder, von wo ihm nur je 3 Felder offen stehen. Die Anzahl der Springerzüge schwankt zwischen 2 und 8 (vgl. Kap. XI, S. 325/326), und zwar beträgt sie 8 von allen Feldern der Gebiete I und II aus, 6 von allen Feldern des Gebietes III aus mit Ausnahme der 4 Eckfelder von III, 4 auf den soeben ausgenommenen 4 Eckfeldern von III und ferner

auf den Feldern von IV, jedoch mit Ausnahme der 4 Eckfelder, für welche die Zugzahl 2 ist, und mit Ausnahme der 8 diesen Eckfeldern benachbarten Felder, wo die Zugzahl 3 ist.

Die Maximalzahlen für König, Königin, Turm, Läufer, Springer sind somit bzw. 8, 27, 14, 13, 8, so daß also für das Schachspiel als obere Grenze aller vom König und seinen 7 Offizieren ausführbaren Züge 105 erscheint. In Wirklichkeit läßt sich allerdings keine Aufstellung der Figuren so angeben, daß diese Gesamtzugzahl tatsächlich erreicht wird, indem sich die Figuren immer entweder gegenseitig bei einigen Zügen im Wege stehen oder aber einige, um die anderen nicht zu hindern, auf die Felder ihrer Maximalzugzahl verzichten müssen. Als das erreichbare Maximum[1]) von Zugmöglichkeiten erscheint so 100, und es gibt sogar nur 2 Stellungen[2]), in denen dieses Maximum erreicht wird, nämlich (in der Notation der Fig. 1, Kap. VII, S. 172):

1) König $d2$; Königin $b3$; Läufer $e4$ und $d4$; Springer $d6$ und $f4$; Turm $c7$; Turm $g5$,
2) König $d2$; Königin $b3$; Läufer $e4$ und $d4$; Springer $d6$ und $f4$; Turm $c7$; Turm $a5$,

wobei für den König, die Läufer, die Türme und den Springer $f4$ die Anzahlen der ihnen tatsächlich freistehenden Züge gleich den betreffenden Maximalzahlen sind, während die Königin nur 23 Züge und Springer $d6$ deren nur 7 hat. — Für den feindlichen König verbleiben dabei in jedem der Fälle noch mehrere Felder, ohne daß er im Schach steht, z. B. $d8$, $f1$, $f8$, $h2$, $h4$, $h6$ in beiden Fällen.

---

1) Die Frage nach dieser Maximalzahl wurde aufgeworfen in der Berliner Schachzeitung 1848, III, p. 363.

2) Die erste der beiden Stellungen wurde angegeben Berliner Schachzeitung IV, 1849, p. 40; s. a. Max Lange, „Lehrbuch des Schachspiels", Halle 1856, p. 192 und von demselben: „Handbuch der Schachaufgaben", Leipzig 1862, p. 30/31. E. Landau bewies sodann, daß nur die angegebenen 2 Stellungen das Verlangte leisten (Schachfreund, herausgeg. von der Berliner Schachgesellschaft, Jahrg. II, 1899, p. 97—99).

C. Minimalzahl der für den Übergang zwischen zwei Feldern erforderlichen Züge der verschiedenen Figuren; Anzahl solcher Übergangsbahnen.

Jaenisch behandelt im ersten Bande seines schon mehrfach zitierten „Traité" der Reihe nach für die verschiedenen Figuren des Schachspiels folgende, übrigens schon vorher von anderer Seite[1]) aufgeworfene und beantwortete Fragen:

1. In wieviel Zügen mindestens kommt die betreffende Figur von einem bestimmten Ausgangsfeld A zu einem bestimmten Endfeld E?
2. Auf wieviel verschiedene Arten ist dieser Übergang mittels der in 1. bestimmten Minimalzahl von Zügen möglich?

Für die Figuren von großer Tragweite — „pièces à longue portée", wie Jaenisch sagt, — nämlich Turm, Läufer, Königin, beantworten sich diese Fragen, wie wir sehen werden, sehr leicht; für diejenigen von kurzer Tragweite („à faible portée"), nämlich König und Springer, weniger einfach. In letzterem Falle (König und Springer) denkt Jaenisch sich ein allseitig unbegrenztes Schachbrett und beantwortet zunächst für diesen natürlich einfacheren Fall beide Fragen, indem er bezüglich der wechselseitigen Lage der beiden Felder A und E alle Kombinationen durchgeht, die auf dem gewöhnlichen Schachbrett möglich sind. Sodann berücksichtigt er die durch die Grenzen des gewöhnlichen Schachbretts gesetzten Schranken und merzt diejenigen vorher erhaltenen Bahnen aus, die zwar auf dem unbegrenzten, nicht aber mehr ganz auf dem begrenzten Schachbrett liegen. Hierdurch erfahren die durch arithmetische Formeln von allgemeinem Charakter formulierten Antworten wesentliche Modifikationen und zwar auch die auf Frage 1

1) Ich zitiere den Abbé Durand, „Études théoriques et pratiques", La Régence I, 1860, p. 213—215, 278—280 (die erste der obigen Fragen); La nouvelle Régence III, 1862, p. 257—260, 289—292, 321—329; IV, 1863, p. 16—22 (die zweite Frage). Vgl. auch bezüglich der ersten Frage: (Perenyi), „Mnemonik des Schachspieles", Wien 1842. Tafeln 28, 29, 81—108.

bezüglichen. So ist z. B. der Übergang von $a1$ zu $b2$ für den Springer auf einem unbegrenzten Brett in 2, auf dem begrenzten Schachbrett dagegen erst in 4 Zügen möglich. Dabei spaltet sich diese Jaenischsche Analyse in so viele Fälle und Unterfälle, daß der allgemeine Charakter der für einen solchen Unterfall schließlich hergeleiteten Formel oft nur noch ein scheinbarer ist. Kurz, diese Fragen von im Grunde genommen so einfacher Natur rechtfertigen in keiner Weise den von Jaenisch dafür aufgebotenen Heerbann arithmetischer Formeln[1]), und man tut daher offenbar von vornherein besser, direkt die konkreten speziellen Fälle ins Auge zu fassen und einzeln vorzunehmen.

Um zu zeigen, wie dies zu geschehen hat, beschränken wir uns auf die Behandlung eines Spezialfalles: die Springerübergänge von einem Eckfeld — etwa $a1$ — aus zu den übrigen Brettfeldern hin, und wollen also für diesen Fall die beiden von Jaenisch gestellten Fragen beantworten. Zu dem Ende schreiben wir in Fig. 39 in das Feld $a1$ eine Null. Die Felder, die von diesem Feld 0 aus in je einem Zuge für den Springer erreichbar sind oder, wie man sagt, das Feld 0 „rösseln", erhalten alle eine „1". Sodann bestimmen wir alle Felder des Brettes, die ein mit „1" gezeichnetes Feld rösseln und selbst noch keine Ziffer führen; sie alle sind offenbar in mindestens je zwei Zügen von 0 aus erreichbar und erhalten daher alle eine „2". Man bestimmt sodann alle von den Feldern 2 aus im nächsten Zuge erreichbaren und noch ungezeichneten Felder und versieht sie mit einer „3", und so geht dies fort. Wir erhalten so die Antwort auf die erste Frage Jaenisch's.

Um nun auch die zweite Frage Jaenisch's zu erledigen, verfahren wir folgendermaßen: Alle mit „1" gezeichneten Felder sind natürlich nur auf je eine Art in einem Zuge von 0 aus

---

1) Eine nicht uninteressante, jedoch nicht strenge mathematische Behandlung der Turmbewegung findet sich bei Brunacci, „Compendio del Calcolo sublime", I, Milano 1811, p. 74—78.

erreichbar; wir schreiben daher hinter die 1 noch „(1)“ (s. die Figur). Ein mit „2“ gezeichnetes Feld ist von 0 aus auf so viele verschiedene Arten in je zwei Zügen erreichbar, als es Felder „1“ rösselt; man erhält so hinter 2 je nachdem noch „(1)“ oder „(2)“[1]). Entsprechend erhält man die Anzahl der Übergänge von 0 zu einem Felde „3“, indem man alle das betreffende Feld 3 rösselnden Felder „2“ aufsucht und die hinter diesen „2“ stehenden eingeklammerten Zahlen addiert, und so geht dies fort. So ist z. B. das Feld $d6$ von $a1$ aus frühe-

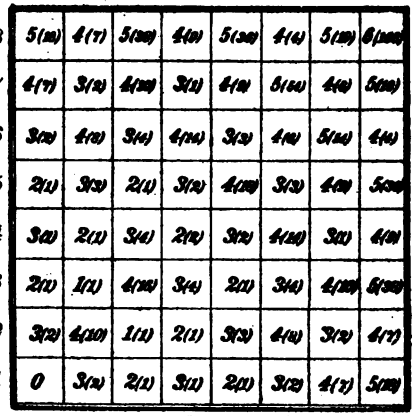


Fig. 39.

stens in vier Zügen und zwar auf 14 verschiedene Arten erreichbar, weil von den $d6$ rösselnden Feldern in je drei Zügen erreichbar sind: $b7$, $b5$, $c4$, $e4$, $f5$ und zwar bzw. auf zwei, drei, vier, zwei und drei Arten; es gibt also zwischen $a1$ und $d6$ zwei vierzügige Übergänge mit $b7$ als vorletzter Station, deren drei mit $b5$ als vorletzter Station usw., im ganzen 14. — In Fig. 39 sind diese Zahlen für alle Felder — $a1$ stets als Ausgangsfeld gedacht — angegeben.

1) Eine (3) oder mehr kommt nicht vor; denn ein zweizügiger Übergang läßt sich immer nur auf höchstens zwei Arten ausführen, wie leicht zu zeigen ist (s. Deutsche Schachzeitung, 57. Jahrgang, 1902, p. 125/6, Anm.).

Die vollständige Antwort auf die Jaenischschen Fragen für den Fall des Springers, d. h. die gesuchten Zahlen für alle überhaupt möglichen verschiedenen Kombinationen von Ausgangs- und Endfeld, würden wir erhalten, wenn wir zu unserer Figur 39 noch 9 weitere dieser Art hinzufügten. Darauf verzichten wir hier[1]) und wollen nur folgendes angeben: Der Springer ist imstande, jeden Übergang von einem Feld des Schachbretts zu einem andern in 5 oder weniger Zügen zu vollziehen; allein für den Übergang von einem Eckfeld zum gegenüberliegenden braucht er mindestens 6 Züge und zwar ist dieser Übergang in 6 Zügen auf 108 verschiedene Arten möglich (s. Fig. 39). Abgesehen von diesem Sonderfall bestimmt sich die Anzahl der erforderlichen Springerzüge im einzelnen folgendermaßen: Es sei A die Kolonnen-, B die Zeilennummer für das eine Feld und a, b die entsprechenden Größen für das andere; die Differenzen $|A-a|$ und $|B-b|$ mögen, was wir durch die Striche andeuten wollen, stets ihrem absoluten Betrage nach, also unbekümmert um das Vorzeichen, genommen werden. Wenn nun

I. die beiden Felder von ungleicher Farbe auf dem Schachbrett sind, d. h. von den Differenzen $|A-a|$ und $|B-b|$ die eine eine gerade, die andere eine ungerade Zahl ist,

so sind 5 Springerzüge für den Übergang erforderlich,

1) wenn eine unserer Differenzen $= 7$ und die andere beliebig ist, und

2) wenn die eine Differenz $= 6$ und die andere $= 5$ ist.

In allen übrigen Fällen ungleichfarbiger Felder sind, da der Springer mit jedem Zuge die Farbe des Feldes wechselt, (s. Kap. XI, S. 326), also bei verschiedenen Farben der Felder die Anzahl der Züge ungerade sein muß, 1 oder 3 Springerzüge erforderlich und zwar sieht man in jedem konkreten Falle sofort, ob der Übergang mit einem Zuge möglich ist, widrigenfalls eben 3 erforderlich sind.

1) Siehe die Figuren jedoch in des Verfassers Artikel „Mathematische Schachfragen", Deutsche Schachzeitung, 57. Jahrg., 1902, p. 156—159, 196—197 (Figg. 5—13 dort).

II. Sind die beiden Felder gleichfarbig, d. h. die Differenzen $|A-a|$ und $|B-b|$ entweder beide gerade oder beide ungerade Zahlen,

so sind 4 Springerzüge erforderlich,

1) wenn eine unserer Differenzen > 4 ist,
2) wenn beide Differenzen $= 4$ oder beide $= 2$ sind,
3) wenn beide Differenzen $= 1$ sind und das eine der beiden Felder ein Eckfeld des Brettes ist.

In allen übrigen Fällen sind, da die Anzahl jetzt gerade sein muß, 2 Springerzüge erforderlich, — abgesehen natürlich von dem oben bereits vorweggenommenen Fall des Übergangs von einer Ecke zur gegenüberliegenden, wo die Zahl 6 betrug.

Wir haben so für den Springer wenigstens auf Frage 1 die vollständige Antwort, deren Richtigkeit in allen Punkten leicht zu beweisen ist, gegeben.

Bereits für den König gestaltet sich die Beantwortung unserer Fragen einfacher, wenn auch im wesentlichen nach demselben Verfahren wie für den Springer. Man sieht hier sofort, daß die erforderliche Minimalzahl von Zügen zwischen 1 und 7 schwankt. Beispielsweise sei angeführt, daß der König von $a1$ nach $b8$ erst in 7 Zügen und zwar auf nicht weniger als 196 verschiedene Arten gelangen kann.[1]) — Für die übrigen Figuren, diejenigen „von großer Tragweite", erledigen sich unsere Fragen, wie schon oben zuvor angegeben, sehr leicht: Der Turm kann jedes Feld, wenn nicht in einem, so in zwei Zügen erreichen und zwar alsdann auf zweierlei verschiedenen Wegen. Der Läufer kann die Felder der anderen Farbe überhaupt nie, die der eigenen dagegen stets in einem oder in zwei Zügen erreichen und zwar in letzterem Falle je nach der gegenseitigen Lage der Felder auf eine oder auf zwei Arten. — Die Königin erreicht alle nicht in einem Zuge erreichbaren Felder in je zwei Zügen und zwar auf 4—12 verschiedene Arten je nach der gegenseitigen Lage der beiden Felder.

---

1) Siehe Deutsche Schachzeitung, l. c. p. 197, Fig. 14.

Kapitel X.

Die 5 Königinnen auf dem Schachbrett.

Im Schach sind, wie Sie wissen, auch einige lusus ingenii, die weiter keinen Nutzen haben, als den Scharfsinn mehr oder weniger zu üben.

H. C. Schumacher an Gauß.
Altona, 16. Juli 1844.
Briefwechsel Gauß-Schumacher, Bd. IV, p. 269.

§ 1. Problemstellung.

In einer Florentiner lateinischen Schachhandschrift[1]) des 15. Jahrhunderts findet sich eine Aufstellung von 16 Königinnen auf dem Schachbrett, mit dem Ziel, daß jedes Feld des Brettes von einer oder mehreren dieser Königinnen beherrscht werde (Fig. 1). Das Bedenken, daß im praktischen Schachspiel schon der Besitz zweier Königinnen ein verhältnismäßig seltenes Glück ist und vollends derjenige von neun, wenngleich praktisch so gut wie ausgeschlossen, auch bereits das theoretische Maximum darstellt, scheint unseren Schachschriftsteller nicht zu der naheliegenden Frage angeregt zu haben, ob nicht vielleicht diese Aufstellung der 16 Königinnen eine außerordentliche Verschwendung von Kräften bedeute und der gewünschte Erfolg sich nicht bereits mit einer weit geringeren Anzahl herbeiführen lasse. Wir fragen also: **Wieviele Königinnen sind mindestens erforderlich, um alle Felder des Schachbretts zu beherrschen?**

---

1) A. van der Linde, „Geschichte und Litteratur des Schachspiels", Berlin 1874, Bd. I, p. 242, Fig. 224 und dazu ibid. p. 284 sub 3 und p. 291/292.

Diese Frage, die als das Königinnen-Minimalproblem ein gewisses Seitenstück zu dem Gegenstande des vorigen Kapitels, dem Königinnen-Maximalproblem, bildet, ist erst in

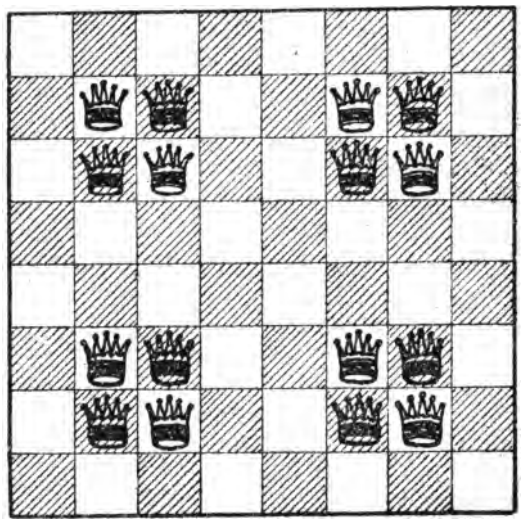


Fig. 1.

neuerer Zeit[1]) behandelt worden, und zwar sowohl mit der weiteren Forderung, daß keine der Königinnen von einer anderen angegriffen wird[2]), wie auch mit der, daß das mit einer Königin

1) Die nackte Fragestellung des Problems, ohne jede Lösung, ist mir zuerst entgegengetreten in der Schachzeitschrift „La nouvelle Régence", II, 1861, p. 200 (Juli-Heft): anläßlich eines Artikels des Abbé Durand (s. hier S. 226, Anm.) über das Problem der 8 Königinnen, der „huit Amazones pacifiques", machte ein Leser des Blattes den Verfasser des Artikels auf das Problem der „Dames conquérantes" aufmerksam. Behandelt worden ist das Problem dann wohl zuerst bei Jaenisch, „Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs", t. 3 (1863), p. 244—271, der in diesem Appendix zu seinem Werke die Untersuchungen eines ihm befreundeten Mr. de R ... (p. 244—265) und im Anschluß daran die eines Herrn Froedman (p. 265 ff.) mitteilt. In neuester Zeit hat sich besonders Prof. Dr. Koloman v. Szily in Budapest mit dem Problem beschäftigt.

2) Siehe Jaenisch, l. c. p. 244; siehe a. E. Pauls, „Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrete", Deutsche Schachzeitung, Bd. 29, 1874, p. 266.

besetzte Feld nicht als „beherrscht" gilt, sondern noch von wenigstens einer der anderen Königinnen bestrichen sein muß.[1]) Je nachdem wir also von diesen weiteren Bedingungen ganz absehen oder aber die erste oder zweite akzeptieren, haben wir 3 verschiedene Probleme, die wir im folgenden als das **„Hauptproblem"** einerseits und die **„Nebenprobleme"** *V* resp. *F*, d. h. **mit „Angriffs-Verbot" resp. mit „Angriffs-Forderung"**, andererseits unterscheiden wollen.

§ 2. Bretter von 4, 9, 16, 25, 49 Feldern.

Fassen wir zunächst, wie beim Königinnen-Maximalproblem (Kap. IX), die einfachsten Bretter ins Auge, so finden wir, daß für ein vier- und neunfeldriges Brett *eine* Königin alle Felder beherrschen kann, und zwar im ersteren Falle von jedem Feld, im letzteren vom Mittelfeld aus. Bei „Angriffsforderung" sind allerdings jedesmal 2 Königinnen erforderlich, und zwar ergeben sich unter dieser Bedingung für ein vierfeldriges Brett 2 verschiedene „Stammlösungen"[2]) (Fig. 2), die zusammen offenbar 6 Lösungen repräsentieren, während für das neunfeldrige Brett unter der gleichen Bedingung der Angriffsforderung 5 Stammlösungen existieren. Diese lauten — in einer auch weiterhin in diesem und dem nächsten Kapitel anzuwendenden, zuerst von Vandermonde[3]) benutzten Schachfelder-Notation, bei der

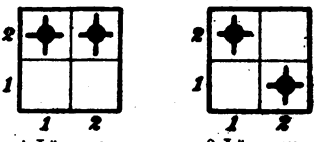


Fig. 2.

1) Jaenisch, l. c. p. 265 und nach seinem Vorgange auch Max Lange, „Mathem. Schachfragen", Schachzeitung, Bd. 18, 1863, p. 206; s. auch von demselben: „Lehrbuch des Schachspiels", 2. Aufl. 1865, p. 196.

2) Die grundlegenden Ausführungen des vorigen Kapitels müssen wir in diesem voraussetzen und verweisen eventuell insbesondere auf § 4 (S. 217—224) dort resp. bezüglich der Bezeichnung „Stammlösung" auf S. 225.

3) „Remarques sur les problèmes de situation", Histoire de l'académie des sciences de Paris 1771, p. 567.

die Buchstaben $a, b, c, \ldots$ der gewöhnlichen deutschen und auch von uns bisher benutzten Notation (s. Fig. 1, S. 172) gleichfalls durch Zahlen: 1, 2, 3, ... ersetzt sind (s. z. B. Figuren 2, 3 hier) — so:

1) 11, 12
2) 11, 22
3) 11, 33
4) 12, 22
5) 12, 32

Diese 5 Stammlösungen repräsentieren, da die zweite und vierte Stellung einfach-symmetrisch[1]), die dritte und fünfte doppelt-symmetrisch sind, zusammen $1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 20$ Lösungen.

$n = 4$.

Nehmen wir nunmehr n^2, die Anzahl der Brettfelder, $= 16$ an, so sind auch für das „Hauptproblem bereits 2 Königinnen erforderlich; es ergeben sich folgende Lösungen:

1) 11, 33
2) 12, 42
3) 22, 23,

wobei jede der 3 Stellungen je 4 Lösungen repräsentiert, so daß der Fall $n = 4$ im ganzen 12 Lösungen und zwar alle mit gegenseitigem Angriff aufweist. Unter der Bedingung des „Angriffsverbots" gibt es somit für diesen Fall überhaupt keine Lösung mit 2 Königinnen. Man müßte also 3 Königinnen aufstellen und würde hier die beiden Stammlösungen

1) 11, 23, 42
2) 11, 24, 43,

zusammen 16 Lösungen, erhalten. Die zweite dieser beiden Lösungen stellt zugleich eine Lösung für den nächsten Fall ($n = 5$) dar (s. Nr. 7 der Tabelle dort).

1) Siehe Anmerkung 2 der vorigen Seite.

$n = 5$.

Ein Brett von 25 Feldern erfordert 3 Königinnen; wir geben im folgenden die verschiedenen Lösungen für das Hauptproblem, indem wir neben jede Stammlösung die Zahl der von ihr repräsentierten Stellungen (2, 4, 8) setzen und weiter durch *F.* resp. *V.* andeuten, daß der Bedingung der Angriffsforderung resp. des Angriffsverbots genügt wird:

1)	11, 13, 43	8 Lös.	*F.*	20)	12, 21, 33	4 Lös.	
2)	11, 15, 43	4 -		21)	12, 21, 35	8 -	
3)	11, 22, 44	4 -	*F.*	22)	12, 21, 44	4 -	
4)	11, 23, 32	4 -		23)	12, 23, 53	8 -	*F.*
5)	11, 23, 53	8 -		24)	12, 33, 43	8 -	
6)	11, 24, 42	4 -		25)	12, 33, 45	4 -	
7)	11, 24, 43	8 -	*V.*	26)	12, 33, 52	4 -	
8)	11, 24, 54	8 -		27)	12, 34, 52	4 -	*F.*
9)	11, 25, 43	8 -		28)	12, 35, 52	4 -	
10)	11, 25, 52	4 -		29)	12, 42, 45	4 -	*F.*
11)	11, 33, 34	8 -	*F.*	30)	13, 23, 53	4 -	*F.*
12)	11, 33, 55	2 -	*F.*	31)	13, 33, 43	4 -	*F.*
13)	11, 34, 43	4 -		32)	22, 23, 24	4 -	*F.*
14)	11, 34, 44	8 -	*F.*	33)	22, 24, 42	4 -	*F.*
15)	11, 34, 53	8 -	*V.*	34)	22, 24, 43	4 -	
16)	11, 35, 53	4 -		35)	22, 33, 44	2 -	*F.*
17)	11, 45, 54	4 -		36)	23, 32, 33	4 -	*F.*
18)	12, 14, 33	4 -		37)	23, 33, 43	2 -	*F.*
19)	12, 14, 53	4 -					

Es gibt also für $n = 5$ im ganzen: 11 · 8 unsymmetrische, 23 · 4 einfach- und 3 · 2 doppelt-symmetrische, zusammen 186 Lösungen; davon genügen der Bedingung *F*:

$$4 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 70$$

und der Bedingung *V*.

$$2 \cdot 8 = 16 \text{ Lösungen.}$$

$n = 6$.

Auch auf einem Brett von 36 Feldern vermögen 3 Königinnen noch der Forderung des Hauptproblems zu entsprechen, jedoch erhält man hier als einzige Stammlösung[1]) die der Fig. 3 (11, 35, 53), die als eine einfach-symmetrische insgesamt 4 Lösungen repräsentiert.

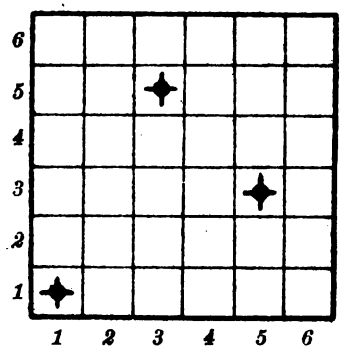


Fig. 3.

Hatten wir bei $n = 4$ den Fall, daß unter den Lösungen des Hauptproblems sich nur die Lösungen des einen Nebenproblems, nicht aber die des anderen fanden, so haben wir jetzt bei $n = 6$ den in prinzipieller Hinsicht noch merkwürdigeren Fall, daß keins der beiden Nebenprobleme durch eine Lösung des Hauptproblems befriedigt werden kann; beide Nebenprobleme erfordern also im Gegensatz zum Hauptproblem, bei dem wir mit 3 Königinnen auskamen, deren mindestens 4. So ergeben sich unter der Bedingung V folgende 17 Stammlösungen[2]) mit je 4 Königinnen:

---

1) Mr. de R . . . bei Jaenisch, „Traité", t. 3, p. 260 u. 271.

2) Die Angabe bei Jaenisch, l. c., p. 260, es gebe 21 Stammlösungen für diesen Fall, ist jedenfalls unrichtig.

1)	11, 23, 36, 62	8	Lös.
2)	11, 24, 45, 62	8	-
3)	11, 24, 45, 52	8	-
4)	11, 25, 56, 62	8	-
5)	11, 26, 43, 64	8	-
6)	11, 34, 46, 63	8	-
7)	12, 24, 31, 65	8	-
8)	12, 25, 46, 53	8	-
9)	12, 25, 51, 64	8	-
10)	12, 26, 31, 54	8	-
11)	12, 26, 31, 65	8	-
12)	12, 26, 51, 65	2	-
13)	12, 31, 44, 65	8	-
14)	12, 31, 46, 65	4	-
15)	12, 35, 41, 64	8	-
16)	12, 36, 41, 64	8	-
17)	13, 36, 41, 64	2	-
	Sa.	120	Lös.

Es mögen für das zweite Nebenproblem (F) wenigstens noch zwei Lösungen mitgeteilt werden[1]), die dadurch merkwürdig sind, daß die betreffenden Stellungen dreifache Symmetrie[2]) zeigen, also bei allen Drehungen und Spiegelungen sich selbst wieder erzeugen; es sind dies:

1) 22, 25, 52, 55

2) 33, 34, 43, 44.

---

1) Nach Frocdman, mitgeteilt bei Jaenisch, l. c. p. 270, soll es für diesen Fall im ganzen 900 Lösungen geben, repräsentiert durch 140 Stammlösungen, von denen 88 unsymmetrisch, 47 einfach-, 3 doppelt- und 2 dreifach-symmetrisch sind; angegeben sind diese Lösungen selbst dort nicht.

2) Siehe eventuell S. 224.

$n = 7$.

Gab es für die Beherrschung des 36-feldrigen Brettes durch 3 Königinnen nur noch eine einzige Konfiguration und unter den Bedingungen *F* und *V* auch nicht einmal diese mehr, so werden wir eine Beherrschung des 49-feldrigen Brettes durch 3 Königinnen von vornherein nicht wohl erwarten dürfen. In der Tat ist sie nicht möglich; man bedarf hierfür unter allen Umständen einer vierten Königin. Andererseits genügen 4 Königinnen aber durchaus, wie überhaupt, wenn k Königinnen ein Brett von n^2 Feldern beherrschen, $k+1$ natürlich stets ein solches von $(n+1)^2$ Feldern zu beherrschen vermögen. Zu der obigen Konfiguration 11, 35, 53 brauchten wir ja nur eine Königin auf 77 hinzuzunehmen und würden so eine Lösung erhalten, die — beiläufig bemerkt — zugleich zeigt, daß auch das Nebenproblem *F* durch 4 Königinnen befriedigt wird. Auch das Nebenproblem *V* wird durch 4 Königinnen befriedigt, freilich mit nur einer einzigen Stammlösung[1]): 12, 26, 41, 55. — Für das Hauptproblem gibt es nach K. v. Szily[2]) im ganzen folgende 13 Stammlösungen:

1)	11, 22, 46, 64	4	Lös.	*F.*
2)	11, 25, 54, 64	8	-	
3)	11, 27, 43, 65	8	-	
4)	11, 35, 45, 74	8	-	
5)	11, 35, 46, 63	8	-	
6)	11, 35, 53, 77	2	-	*F.*
7)	12, 21, 37, 64	8	-	*F.*
8)	12, 26, 41, 55	8	-	*V.*
9)	12, 36, 52, 74	8	-	
10)	13, 22, 31, 56	8	-	
11)	13, 36, 41, 66	8	-	
12)	14, 44, 54, 64	4	-	*F.*
13)	22, 33, 44, 66	4	-	*F.*

1) Zuerst angegeben bei Jaenisch, „Traité", t. 3, p. 261.

2) K. v. Szily, „Das Minimalproblem der Damen", Deutsche Schachzeitung, 57. Jahrg., 1902, p. 327.

Im ganzen gibt es somit für das Hauptproblem 86, für das Nebenproblem *F* 22 und für das Nebenproblem *V* 8 Lösungen.

§ 3. Der Fall des gewöhnlichen Schachbretts.

Für den Fall $n = 8$ oder das gewöhnliche Schachbrett braucht man, wie wir schon in dem Titel dieses Kapitels ausgesprochen haben, 5 Königinnen. 4 Königinnen würden höchstens 62 Felder beherrschen, z. B. in der Stellung[1]) 11, 25, 58, 82, und unter der Bedingung *F* sogar nur 61 Felder.[2])

Die Zahl der Lösungen des Hauptproblems ist hier sehr groß und beläuft sich nach Prof. v. Szily, der sich der mühevollen Aufgabe unterzogen hat, das vollständige Verzeichnis aufzustellen, auf 638 Stammlösungen[3]), von denen 61 einfach-symmetrisch, die übrigen aber unsymmetrisch sind, so daß als Gesamtzahl aller Lösungen überhaupt sich die Zahl 4860 ergibt. Da die Liste bisher noch nirgends publiziert ist und der Fall $n = 8$ immerhin ein erhöhtes Interesse beanspruchen darf, so haben wir uns entschlossen, die Liste dieser 638 Stammlösungen als Anhang zu diesem Kapitel zum Abdruck zu bringen (S. 313ff.). Hier mag außerdem eine größere Anzahl von ausgewählten Lösungen beispielshalber figürlich wiedergegeben werden (Figuren 4—24).

Von diesen abgebildeten Beispielen genügen die Figuren 4—6; 12—17; 19 der Bedingung *F*, die Figuren 20—24 der Bedingung *V*, so daß also die beiden Nebenprobleme, auf die wir am Ende dieses Paragraphen noch zurückkommen werden,

---

1) Außer der obigen noch 7 weitere Stellungen dieser Art: 11, 28, 54, 65; 11, 35, 57, 73; 11, 45, 56, 64; 12, 26, 51, 65; 13, 27, 52, 66; 13, 27, 52, 75; 13, 37, 51, 75 (s. K. v. Szily, l. c. p. 327; vgl. a. Deutsche Schachzeitung 56, 1901, p. 96; bei Jaenisch l. c. p. 245 die 4 der Bedingung *V* genügenden).

2) Siehe Jaenisch, l. c. p. 269.

3) Prof. v. Szily hatte bereits im März 1901 die Güte, dem Verfasser diese Liste mitzuteilen; s. a. Deutsche Schachzeitung, Bd. 57, 1902, p. 199, sowie Encyklopaedie der mathem. Wissenschaften, Bd. 1, T. II (1900—1904), p. 1084.

jedenfalls auch durch 5 Königinnen, wie das Hauptproblem, ihre Erledigung finden.

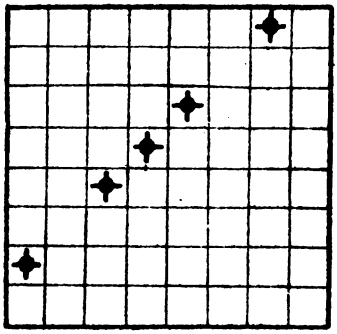


Fig. 4.

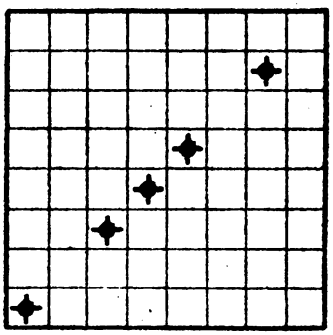


Fig. 5.

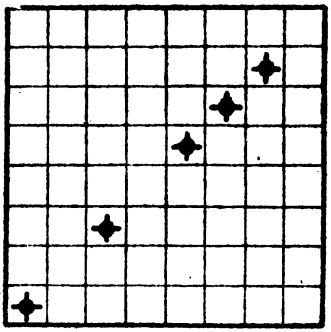


Fig. 6.

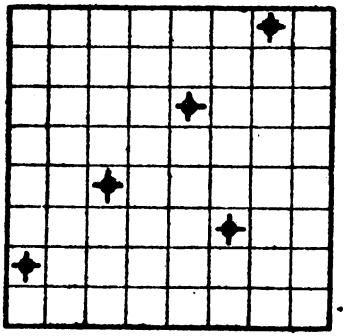


Fig. 7.

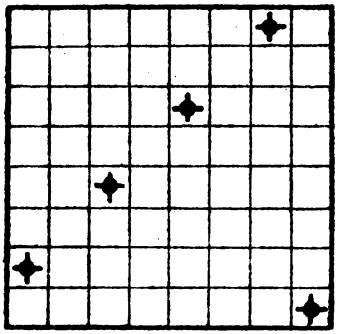


Fig. 8.

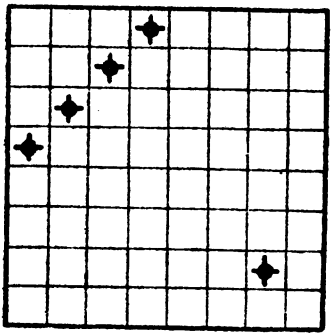


Fig. 9.

Die Figuren 4—19 stellen bereits den höchsten Grad der in diesem Falle überhaupt möglichen Symmetrie: die

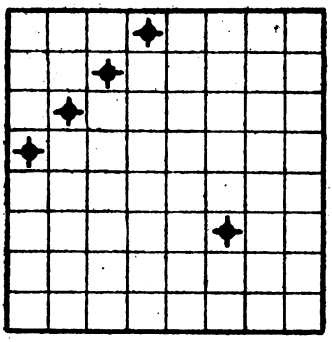


Fig. 10.

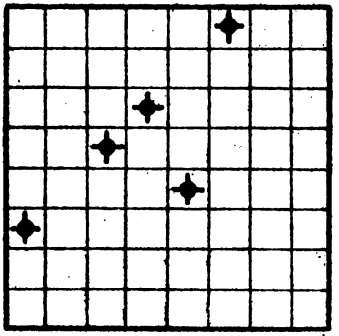


Fig. 11.

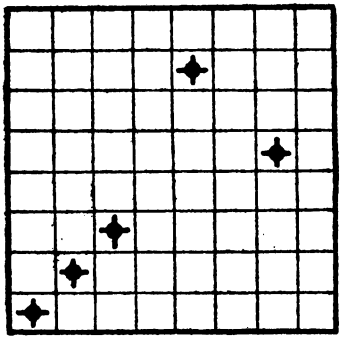


Fig. 12.

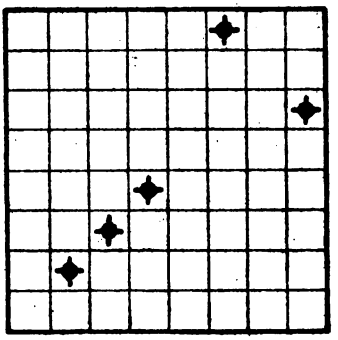


Fig. 13.

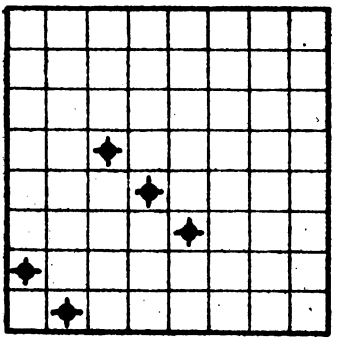


Fig. 14.

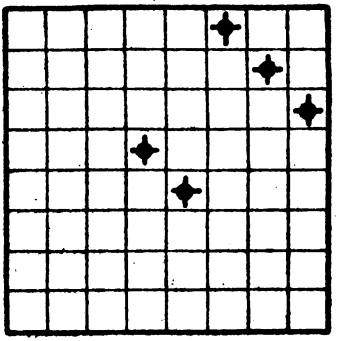


Fig. 15.

einfache Symmetrie, dar, da bei Aufstellung einer ungeraden Anzahl von Objekten auf einem geradzelligen Brette eine Symmetrie offenbar nur dadurch entstehen kann, daß eine ungerade Anzahl dieser Objekte (im vorliegenden Falle 1, 3 oder 5) auf Feldern der einen Diagonale und die übrigen Objekte (im vorliegenden Falle 4, 2 oder 0) paarweise symmetrisch zu dieser Diagonale aufgestellt werden. Die letzteren —

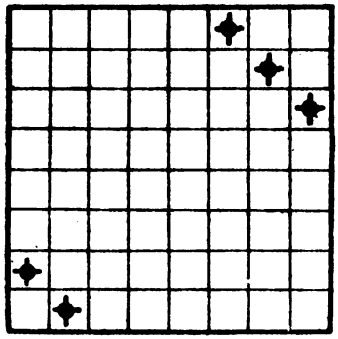


Fig. 16.

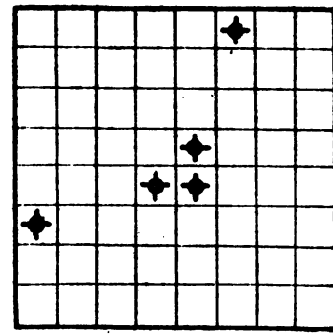


Fig. 17.

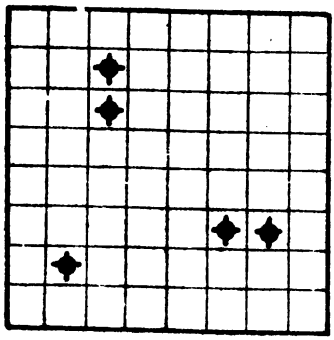


Fig. 18.

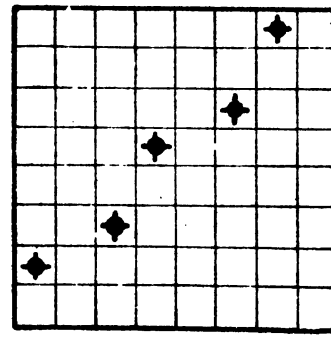


Fig. 19.

die zu der Diagonale symmetrisch aufgestellten Paare von Königinnen — greifen sich dann gegenseitig an, so daß sich also unter der Bedingung V diese Aufstellung völlig verbieten würde; da nun bei Aufstellung aller 5 Königinnen auf der einen Diagonale diese sich sogar alle gegenseitig angreifen würden, so kann das Nebenproblem V nicht einmal einfach-

symmetrische, sondern nur unsymmetrische Lösungen besitzen, so daß also jede Stammlösung hier ausnahmslos je 8 Lösungen repräsentiert. Höchstens können hier Pseudo-Symmetrien resp. „partiell-symmetrische" Lösungen, wie wir im vorigen Kapitel gelegentlich (S. 255) sagten, auftreten, wie Fig. 20 eine solche zeigt: eine Konfiguration, die in bezug auf ein verkürztes, durch gestrichelte Linien angedeutetes Brett von 7^2 Feldern doppelt-symmetrisch ist[1]), — ebenso wie solche Pseudo-Doppel-Symmetrien natürlich auch in dem allgemeinen Fall, also unabhängig von der Bedingung V, auftreten (s. die Figuren 4 und 5).

Einzelne Konfigurationen gestatten gewisse Verschiebungen auf dem Brett, ohne dadurch ihre Eigenschaft, eine Lösung des Problems darzustellen, zu verlieren;[2]) so geht bei einer Translation in der Richtung einer Diagonalen Fig. 12 in Fig. 13, Fig. 14 in Fig. 15, bei einer Translation in vertikaler Richtung Fig. 4 in Fig. 5 über; Translationen in 3 Richtungen: in vertikaler, diagonaler und horizontaler, gestattet Fig. 21 und geht hierbei beziehungsweise in die Figuren 22, 23, 24 über. Auch Fig. 20 gestattet, was mit ihrer partiellen Symmetrie zusammenhängt, Translationen in den drei Richtungen $\rightarrow$, $\nearrow$, $\uparrow$, liefert aber hierbei keine neuen Stammlösungen, sondern nur solche, die zu ihren eigenen Derivierten[3]) gehören, speziell durch Drehungen aus ihr hervorgehen. — Auf das Beispiel Fig. 19 mag noch hingewiesen werden, da die Reihe der 5 besetzten Felder eine Springerkette[4]) ergibt.[5]) — Während in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle zwei

1) Dasselbe gilt unter den 91 Lösungen von V noch von den Nummern 341 und 533 der Tabelle im Anhang

2) Siehe Jaenisch, l. c. p. 253—254.

3) Siehe bezüglich dieser Bezeichnung eventuell Kap. IX, § 4 (S. 218).

4) Vgl. Kap. XI, S. 329.

5) Unter den 638 Stammlösungen gibt es sechs dieser Art (briefliche Mitteilung des Prof. v. Szily vom 10. April 1901), darunter als Lösung für F nur die abgebildete und unter der Bedingung V nur die Nrn. 33, 296, 629 (alle 3 von der Konfiguration der Fig. 5 auf S. 216) der im Anhang gegebenen Tabelle (s. a. Jaenisch, l. c. p. 251, Anm. 1).

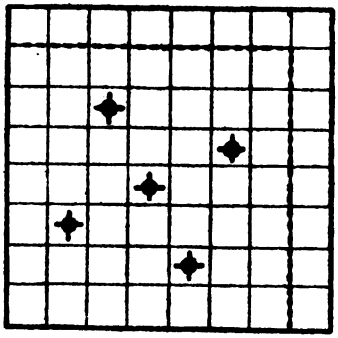


Fig. 20.

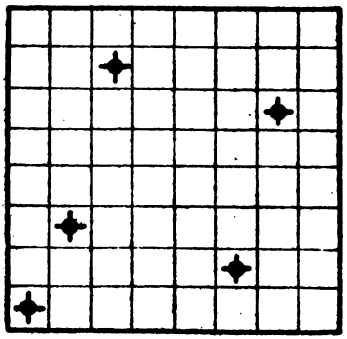


Fig. 21.

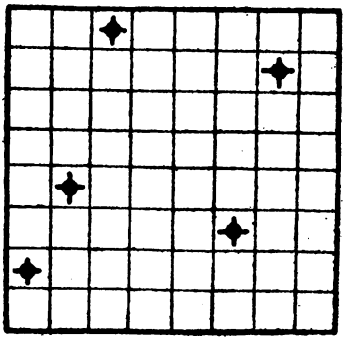


Fig. 22.

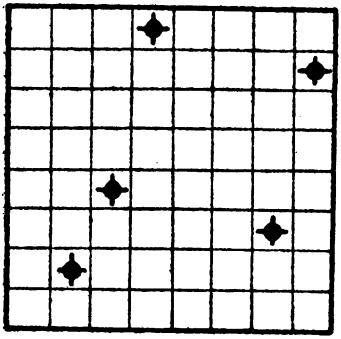


Fig. 23.

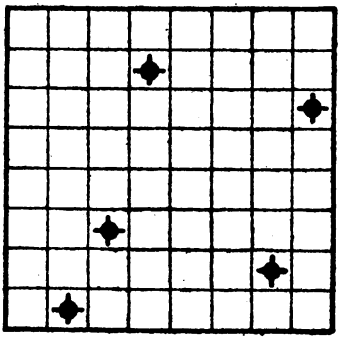


Fig. 24.

Königinnen auf Feldern der einen und 3 auf Feldern der anderen Farbe[1]) stehen werden, stehen z. B. in den Figuren 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13 alle 5 auf Feldern derselben Farbe, ein Fall, der, wie man sofort vermutet, bei den Lösungen des Nebenproblems *F* relativ häufig, bei denen des Nebenproblems *V* dagegen recht selten sein wird.

Von den beiden Nebenproblemen besitzt *F* nach den Ermittelungen Prof. v. Szilys 56 bei uns in der Tabelle des Anhangs in dort angegebener Weise gekennzeichnete Stammlösungen[2]), darunter 24 einfach-symmetrische, zusammen also 352 Lösungen. Das Nebenproblem *V* besitzt 91 in der Tabelle gleichfalls markierte Lösungen, die alle, wie schon oben gezeigt wurde, unsymmetrisch sein müssen, zusammen also 728 Lösungen; diese wurden zuerst von Jaenisch nach den Mitteilungen des schon genannten Anonymus M^r de R...[3]) und unabhängig davon von K. v. Szily[4]) veröffentlicht.

§ 4. $n = 9, 10, 11, 12$. Zusammenstellung aller bisherigen Resultate.

$n = 9$.

Auch für $n = 9$ teilen sich 5 Königinnen in die Herrschaft über das ganze Brett; unter den Lösungen dieses Falles seien zunächst folgende doppelt-symmetrische hervorgehoben:

1) 12, 29, 55, 81, 98.
2) 13, 39, 55, 71, 97
3) 14, 49, 55, 61, 96
4) 23, 38, 55, 72, 87
5) 24, 48, 55, 62, 86
6) 34, 47, 55, 63, 76,

die zugleich alle der Bedingung *V* genügen. Als Beispiel einer Lösung des Nebenproblems *F* möge die doppelt-symmetrische 22, 44, 55, 66, 88 angeführt werden. — Die Gesamtzahl der Lösungen ist bisher weder für das Hauptproblem noch für eins der Nebenprobleme bestimmt.

1) Da die Figuren hier der Einfachheit halber alle mit einfarbigen Feldern gezeichnet sind, wolle man eventuell Fig. 1, S. 172 zu Rate ziehen.

2) Bei Jaenisch, l. c. p. 266—267 sind — nach M^r de R... und Froedman — 33 der 56 Stammlösungen angegeben.

3) Jaenisch, l. c. p. 255—259.

4) Pesti Hirlap, 10. Febr. 1901.

$n = 10$ und $n = 11$.

Auch für $n = 10$ und $n = 11$ genügen immer noch 5 Königinnen. Wir beschränken uns darauf, das Brett der 81 Felder mit der soeben für $n = 9$ sub Nr. 2 angegebenen doppelt-symmetrischen Lösung 13, 39, 55, 71, 97 ringsum mit einem Rand von der Breite eines Feldes zu umgeben (s. Fig. 25), und erhalten so eine von K. v. Szily für $n = 11$ angegebene[1]) Lösung, die aber natürlich zugleich auch eine Lösung für $n = 10$ bildet, also eine Stellung, welche die gewiß merkwür-

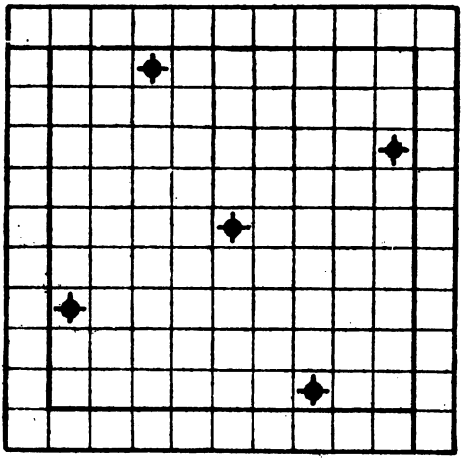


Fig. 25.

dige Eigenschaft besitzt, zu gleicher Zeit den 3 Fällen $n = 9$, 10, 11 als Lösung zu dienen. Zugleich repräsentiert die Konfiguration für jeden der 3 Fälle eine Lösung des Nebenproblems *V*. Wenn Fig. 25, wie Prof. v. Szily für „höchst wahrscheinlich" hielt, die einzige Lösung für $n = 11$ darstellt, so wäre bei der doppelten Symmetrie dieser Lösung die Gesamtzahl aller Lösungen dieses Falles nur $= 2$; zugleich würde alsdann das Nebenproblem *F* für $n = 11$ bereits wenigstens 6 Königinnen erfordern.

1) Zweiter Teil der S. 292, Anm. 2 zitierten Abhandlung: Deutsche Schachzeitung, 58. Jahrg., 1903, p. 65.

$n = 12$.

Nach v. Szily sind 6 Königinnen erforderlich. Eine Lösung erhalten wir, indem wir an zwei benachbarte Seiten der Fig. 25 einen Streifen von der Breite eines Feldes ansetzen und die sechste Königin im Knickpunkte dieses neuen hufeisenförmigen Gebietes aufstellen (vgl. S. 292, sowie Kap. IX, S. 215/6). Man bekommt so die Lösung[1]): 1,1; 3,5; 5,11; 7,7; 9,3; 11,9, die jedoch weder der Bedingung V noch F genügt.

Wir wollen diese statistische Behandlung unseres Problems nicht weiter führen, sondern nur noch die bisher erhaltenen Daten in einer Tabelle zusammenstellen. Dabei sei n^2, wie bisher, die Anzahl der Brettfelder, k die für den betreffenden Fall erforderliche Minimalanzahl von Königinnen, S die Anzahl der Stammlösungen, L die aller Lösungen; k_V, S_V, L_V und k_F, S_F, L_F seien die entsprechenden Größen für die Nebenprobleme V und F.

n	k	S	L	k_V	S_V	L_V	k_F	S_F	L_F
1	1	1	1	1	1	1		0	0
2	1	1	4	1	1	4	2	2	6
3	1	1	1	1	1	1	2	5	20
4	2	3	12	3	2	16	2	3	12
5	3	37	186	3	2	16	3	15	70
6	3	1	4	4	17	120	4	140 (?)	900 (?)
7	4	13	86	4	1	8	4	5	22
8	5	688	4860	5	91	728	5	56	352
9	5	?	?	5	?	?	5	?	?
10	5	?	?	5	?	?	?	?	?
11	5	1 (?)	2 (?)	5	1 (?)	2 (?)	6 (?)	?	?
12	6	?	?	?	?	?	?	?	?

1) Wir trennen von hier ab, da sonst Mißverständnisse möglich wären, Zeilen- und Kolonnenziffer durch ein Komma ab.

Die bisher ermittelten Werte für k — mit Einschluß derjenigen für die Nebenprobleme — gehören also einem folgendermaßen definierten Intervall an:

$$\frac{n}{2} + 1 \geqq k \geqq \frac{n-1}{2}.$$

Ob dies allgemein gilt[1]), muß dahingestellt bleiben.

§ 5. Betrachtungen allgemeinerer Art.

Wir waren im vorhergehenden auf die dort beobachtete Methode der Statistik angewiesen; denn irgendwelche Ansätze zu einer mathematischen Behandlung des Problems oder zu einer methodischen Auffindung von Lösungen fehlen noch durchaus. Methoden, die vielleicht in einzelnen Fällen mit Leichtigkeit elegante Lösungen liefern, versagen für andere, insbesondere größere Werte von n, vollkommen. Dies mag an einem Beispiele des näheren dargelegt werden: Für $n = 8$ ist $k = 5$; es liegt nun nahe, die 5 Königinnen auf dem 25-feldrigen Quadrat der Zeilen 1—5 und Kolonnen 1—5 so aufzustellen, daß nie zwei in derselben Zeile oder Kolonne stehen (Maximalproblem des Turms für $n = 5$). Alsdann beherrschen die 5 Königinnen, lediglich als Türme angesehen, auch die vollen Zeilen 1—5 und Kolonnen 1—5 des 64-feldrigen Quadrats, so daß nur noch ein Quadrat von 9 Feldern übrig bleibt. Diese 9 Felder gehören 5 verschiedenen, unter sich parallelen schrägen Linien[2]) an, und es kommt also alles darauf an, die 5 Königinnen zugleich so aufzustellen, daß jede dieser 5 schrägen Linien von einer der 5 Königinnen beherrscht wird. Dieser Methode entsprechen beispielsweise die Konfigurationen der Figuren 14 und 15 und verwandt mit ihnen ist übrigens auch die der Fig. 16, bei der das 9-feldrige Quadrat jedoch im Innern des Brettes

1) Vgl. v. Szily, Zweiter Teil der Abh., l. c. p. 66. Die Annahme von Pauls (l. c. p. 266), daß, abgesehen von den kleinen Werten von n, stets $k = \frac{n}{2} + 1$ sei, ist jedenfalls unrichtig resp. trifft nur ganz vereinzelt zu (z. B. für $n = 8$).

2) In Fig. 26 sind diese schrägen (diagonalgerichteten) Linien — für einen anderen Fall — angedeutet.

liegt. Für unseren Fall $n = 8$ liefert die skizzierte Methode im ganzen 4 verschiedene Lösungen: außer den bereits angegebenen der Figuren 14, 15 noch die Lösungen 33 und 296 der Tabelle des Anhangs, zwei Lösungen, die übrigens in ähnlicher Beziehung zueinander stehen wie die der Figuren 14 und 15, indem die Konfiguration[1]), welche die 5 Königinnen bilden, ohne Rücksicht auf die Grenzen des Brettes, in beiden Fällen dieselbe ist. Damit sind wir jedoch bereits an der Grenze der Leistungsfähigkeit unserer Methode angelangt: außer für $n = 8$ und noch $n = 5$ (vgl. die Nrn. 4 und 20 der betreffenden Tabelle, S. 289) ist sie überhaupt nicht anwendbar: wohl kann man in dieser Weise Konfigurationen von Königinnen bilden, die alle n^2 Felder des betreffenden Brettes beherrschen, die nach dieser Methode erforderliche Anzahl von Königinnen ist jedoch, wie man leicht erkennt, — außer für $n = 5, 8$ — regelmäßig größer als die Minimalzahl, die unser Problem an sich erfordert. Offenbar wird bei dieser Methode die Schlagkraft der einzelnen Königin noch nicht genügend ausgenutzt und es liegt daher, um einen ökonomischeren Gebrauch von den k Königinnen zu machen, der Gedanke nahe, nicht ein Eckquadrat, sondern ein im Innern des Brettes gelegenes Gebiet als Operationsbasis zu wählen, da alsdann die Läufereigenschaft der Königin nicht nur, wie zuvor, wesentlich nach einer Seite, sondern vielmehr nach 4 Seiten zur Geltung kommt. Grenzen wir z. B. auf dem 81-feldrigen Brett ein inneres Quadrat von 25 Feldern symmetrisch zum Mittelpunkt ab und stellen auf diesem inneren Quadrat 5 Königinnen in derselben Weise auf wie bei der doppelt-symmetrischen Lösung des Maximalproblems für $n = 5$ (Nr. 10 der Tabelle S. 216, Spiegelbild der Fig. 7 ebendort), so bilden diese zugleich eine Lösung des Minimalproblems für das 81-feldrige Brett, indem sie auch die 4 Eckquadrate von je 4 Feldern vollständig beherrschen (diese Lösung ist oben, S. 299, unter $n = 9$ als letzte der dort angegebenen verzeichnet). — Wir wollen

1) Es ist die der Fig. 5 auf S. 216, wie bereits oben (Anm. 5, S. 297) gesagt war.

jedoch unsere Methode noch weiter dahin modifizieren, daß wir für größere Werte von n die Königinnen eventuell noch weiter nach dem Innern des Brettes hin konzentrieren und wollen daher in Zukunft in Aussicht nehmen, die k Königinnen nicht gerade auf einem k^2-feldrigen, sondern eventuell auch einem noch kleineren inneren Quadrat aufzustellen. In der Tat werden wir so noch einige Schritte weiter gelangen und wollen dies an dem Brett zeigen, vor dem wir bei den statistischen Ermittelungen des vorigen Paragraphen Halt gemacht hatten: an

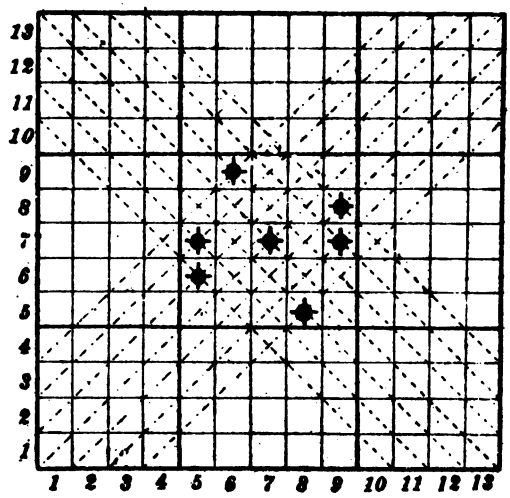


Fig. 26.

$n = 13$. Die erforderliche Minimalzahl k ist hier $= 7$. Wir stellen uns also die Aufgabe, 7 Königinnen auf einem symmetrisch um das Mittelfeld gelegenen inneren Quadrat von — sagen wir: p^2 — Feldern so aufzustellen, daß in jeder der p Zeilen und Kolonnen mindestens eine Königin steht und daß die Königinnen als Läufer alle Felder der 4 in den Ecken unbesetzt gebliebenen Quadrate beherrschen. Da wir nur 7 Königinnen haben und jeder Läufer vom Innern aus nur je eine der (in Fig. 26 angedeuteten) schrägen Linien desselben Eckquadrats bestreichen kann, so darf das Eckquadrat nur 7 solche schrägen Linien aufweisen, also nur aus

4^2 Feldern bestehen. Denken wir uns an jeder Ecke ein solches Quadrat abgeschnitten, so bleibt als inneres Quadrat ein solches von 25 Feldern übrig; auf diesem haben wir unsere 7 Königinnen in der angegebenen Weise aufzustellen. Man findet leicht die Stellung der Fig. 26, die jedoch bereits die einzige Lösung[1]) repräsentiert, die unsere Methode für $n = 13$ zu liefern imstande ist. — Auch für einen anderen Fall, $n = 17$, für den $k = 9$ ist,

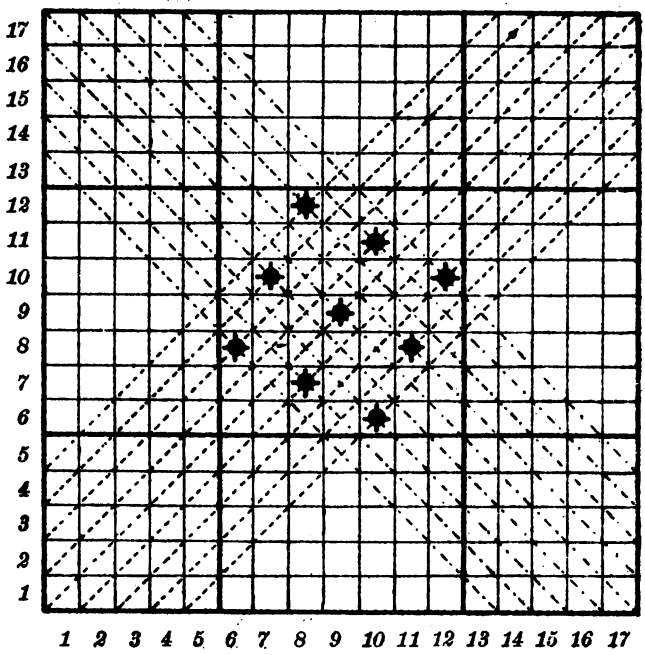


Fig. 27.

erweist unsere Methode sich als zweckmäßig und liefert uns die bereits von v. Szily angegebene elegante Lösung der Fig. 27; diese ist doppelt-symmetrisch und weist neben dem besetzten Mittel-

1) Diese Lösung findet sich bereits bei v. Szily, 2. Teil der Abhandlung, l. c. p. 65 angegeben neben 33 anderen Lösungen für $n = 13$; die Gesamtzahl der Lösungen für diesen Fall ist bisher nicht bestimmt.

feld zwei „Symmetriequadrupel“[1]) auf. Man erkennt nach einer Bemerkung, die wir bereits im vorigen Kapitel (S. 252/253) machten, leicht, daß es zulässig sein wird, ein Symmetriequadrupel für sich allein einer Spiegelung an einem Brettrand zu unterwerfen, ohne daß dadurch der Charakter der „Lösung“ verloren geht, weil eben, wie a. a. O. gezeigt ist, die Gesamtheit der von dem Quadrupel beherrschten Felder trotz der Spiegelung genau dieselbe bleibt. Wir erhalten so aus der Stellung der Fig. 27 die weitere Stellung

6,8; 7,8; 8,11; 8,12; 9,9; 10,6; 10,7; 11,10; 12,10,

die, wie man sich leicht auch direkt überzeugt, in der Tat wieder eine Lösung unseres Problems darstellt. Wir führen sie hier an, da sie auch nach den Grundsätzen der an Figg. 26 und 27 beschriebenen Bildungsmethode gebaut ist, und dies gilt auch noch von einer dritten Lösung[2]), nämlich:

6,8; 7,10; 8,7; 8,12; 9,10; 10,6; 10,8; 11,11; 12,9.

Weitere Lösungen liefert unsere Methode für $n = 17$ jedoch nicht, und überhaupt findet sie allem Anschein nach an dem Fall $n = 17$ bereits die Grenze ihrer Verwendbarkeit.

Steht somit ein Verfahren, das für alle oder auch nur eine größere Anzahl der Werte von n eine oder einzelne Lösungen lieferte, noch aus, so fehlt es ebensosehr an einer rationellen Methode, für den Einzelfall die Lösungen in erschöpfender Anzahl anzugeben. Man ist lediglich auf das Verfahren des methodischen Probierens angewiesen; die verschiedenen Lösungen für ein und dasselbe Brett sind eben von

---

1) Vgl. S. 250.

2) Auch diese beiden Lösungen für $n = 17$, von denen die letzte unsymmetrisch ist und eine Springerkette (vgl. S. 297 nebst Anm. 4 dort) darstellt, finden sich bereits bei v. Szily, 2. Teil der Abh., l. c. p. 66, neben 3 anderen von wesentlich anderer Struktur. — Die oben mitgeteilten 3 Lösungen stellen übrigens gleichzeitig Lösungen für $n = 16$ dar, wofern für diesen Fall, wie es scheint, k auch bereits $= 9$ ist; v. Szily gibt für $n = 16$ a. a. O. 35 Lösungen an und teilte dem Verf. noch 3 weitere brieflich (20. Febr. 1908) mit, ohne daß damit jedoch die Gesamtzahl erschöpft ist.

grundverschiedener Struktur. Einige Beispiele für den Fall $n = 13$ (Figuren 28—32) mögen dem Leser dies neben der bereits gegebenen Fig. 26 illustrieren. Die durch die Turm-

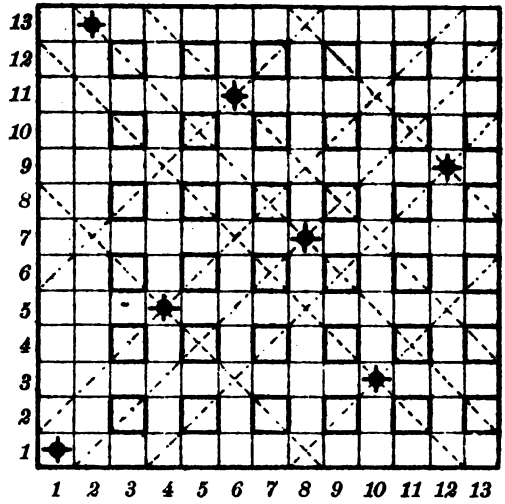


Fig. 28.

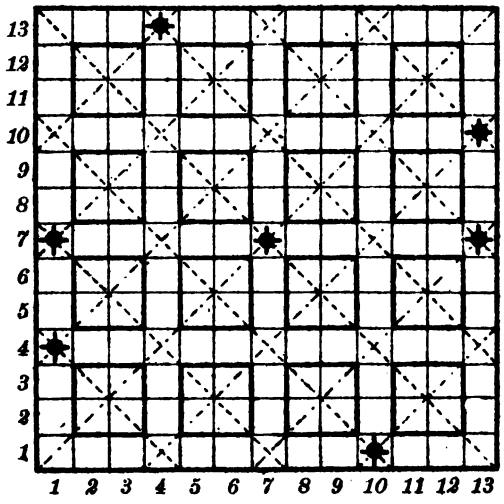


Fig. 29.

gangart der Königinnen nicht bestrichenen Felder resp. Gebiete sind in diesen Figuren durch stärkere Umränderung gekennzeichnet, ihre Beherrschung durch die Königinnen als Läufer

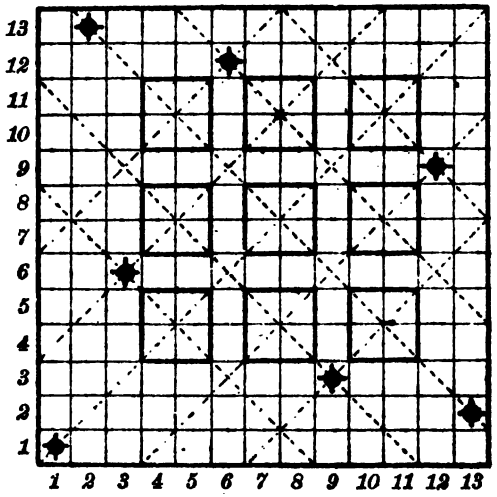


Fig. 30.

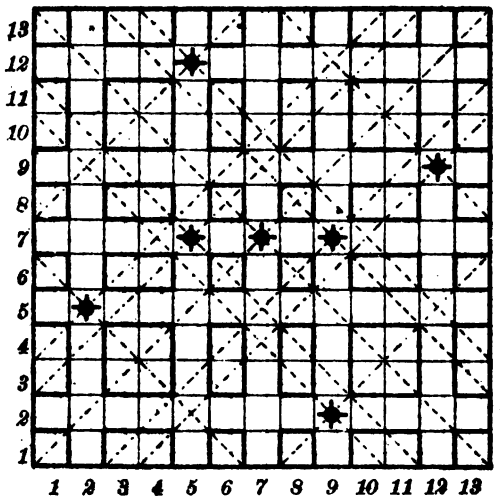


Fig. 31.

ist, wie schon vorher, durch die entsprechenden diagonalgerichteten Linien angedeutet. Während für einige Lösungen, wie Fig. 31 oder 26, jede der 7 Königinnen als Läufer nach allen 4 Seiten hin wirken muß, wirken in anderen Fällen einzelne nur in einer Richtung nach zwei oder einer Seite (vgl. in Fig. 32: 1,1; 5,10; 10,5) oder auch gar nicht als Läufer wie 1,1 in Fig. 28 (auch 2,13 wäre als Läufer entbehrlich, könnte also durch einen Turm ersetzt werden; die Lösung ist aus der in Fig. 25 für $n = 11$ gegebenen in leicht erkennbarer Weise entstanden).

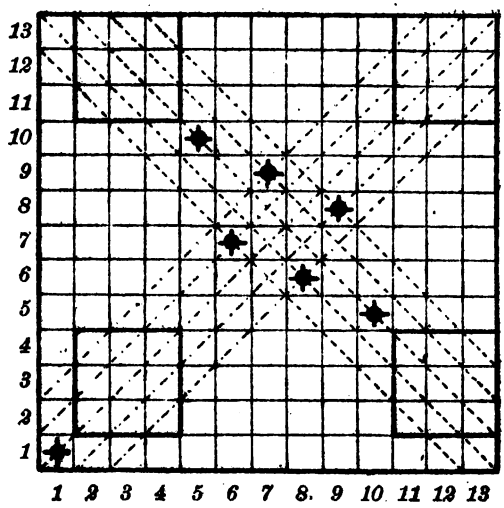


Fig. 32.

Auch über die Abhängigkeit des Wertes k von n fehlt es bislang noch durchaus an allgemeinen Resultaten; die oben (S. 302) angegebene Ungleichung hat nur empirischen Charakter und Wert. Es sei bei der Gelegenheit gestattet, auf die Tabelle von S. 301 nochmals zurückzugreifen und unter Einbeziehung der seitdem besprochenen Spezialfälle alle bisher ermittelten Werte von k nochmals tabellarisch zusammenzustellen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
k	1	1	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	7 (?) [1]	8 (?)	9	9

Eine Untersuchung darüber, ob auch für $n = 18$ und 19 noch $k = 9$ ist, wie v. Szily hypothetisch annimmt, steht noch aus, wäre aber von Interesse.

Empirischen Charakter besitzt auch ein von K. v. Szily[2]) aufgestellter Satz, der in den bisher untersuchten Spezialfällen sich als richtig erwies, eines Beweises aber noch entbehrt:

Ist für ein n^2-feldriges Schachbrett die im Sinne des Hauptproblems erforderliche Minimalzahl von Königinnen k, so können $k - 1$ Königinnen auf demselben Brett höchstens $n^2 - 2$ Felder beherrschen, und, wenn sie es tun, so liegen die beiden unbedrohten Felder zusammen auf derselben horizontalen, vertikalen oder diagonalgerichteten Linie.

Auf dem gewöhnlichen Schachbrett beherrschen z. B. 4 Königinnen höchstens 62 Felder und für jede der 8 Stellungen dieser Art (vgl. S. 293 nebst Anm. 1) liegen die beiden nicht angegriffenen Felder zusammen auf einer diagonal- resp. in einem Falle: vertikalgerichteten Linie.

Ist der vorstehende Satz richtig, so sind es natürlich auch folgende Korollare:

1. Wenn auf einem n^2-feldrigen Schachbrett nach Aufstellung einer gewissen Anzahl von Königinnen nur ein Feld unbeherrscht (im Sinne des Hauptproblems) bleibt, so läßt sich die gleiche Anzahl von Königinnen auch so aufstellen, daß alle Felder beherrscht werden.

2. Wenn auf einem n^2-feldrigen Schachbrett nach Aufstellung einer gewissen Anzahl von Königinnen zwei Felder unbeherrscht (im Sinne des Hauptproblems) bleiben und diese beiden Felder weder auf derselben vertikalen, horizontalen noch diagonalgerichteten Linie liegen, so läßt sich die gleiche Anzahl von Königinnen auch so aufstellen, daß alle Felder beherrscht werden.

1) Dieser und der folgende Wert (für $n = 15$) beruhen nur auf Vermutung (v. Szily, 2. Teil der Abhandlung. l. c. p. 68); eine Lösung mit 7 bzw. 8 Königinnen ist für diese beiden Fälle bisher nicht bekannt.

2) 2. Teil der Abhandlung, l. c. p. 67.

§ 6. Das Problem für die übrigen Schachfiguren.

Erheben wir für die übrigen Figuren des Schachspiels dieselbe Forderung wie für die Königin, so ist zunächst zu sagen, daß für den Turm, der von jedem Platz aus eine konstante Zahl von Feldern (14) beherrscht, das Minimalproblem mit dem Maximalproblem des vorigen Kapitels völlig zusammenfällt, falls auch jetzt das Angriffsverbot statuiert wird. In jedem Falle sind aber 8 Türme erforderlich, um das ganze Brett zu beherrschen. Bei Angriffsforderung stelle man alle 8 etwa in dieselbe Zeile oder Kolonne. Auch von Läufern sind 8 zur Beherrschung des ganzen Bretts erforderlich, 4 von jeder Farbe. Man setze dieselben etwa alle auf eine der beiden mittleren Zeilen resp. Kolonnen oder z. B. auf 33, 35, 73, 75 und entsprechende 4 weiße Felder usw.

Für den Springer ist die Frage unter der Bedingung des Angriffsverbots im „Intermédiaire des mathématiciens“[1]) und zwar allgemein für ein Brett von n^2 Feldern gestellt worden, ohne jedoch bisher eine erledigende Antwort gefunden zu haben. Für 16 Felder sind, wie man sich leicht überzeugt, mindestens 4 Springer nötig und zwar ergeben sich 3 verschiedene Stammlösungen: 1) Die 4 Springer stehen auf dem mittleren Quadrat (22, 23, 32, 33); 2) die 4 Springer stehen alle auf einer der mittleren Zeilen oder Kolonnen (12, 22, 32, 42); 3) die 4 Springer stehen auf einem mittleren Seitenquadrat (12, 13, 22, 23). — Für das gewöhnliche Schachbrett müssen hiernach jedenfalls 16 Springer ausreichen, je 4 für jeden Quadranten; immerhin ist es sehr wohl möglich, daß auch schon eine kleinere Zahl genügt; bei Aufhebung des Angriffsverbots ist dies sogar sicher der Fall; so genügen z. B. jedenfalls folgende 14 Springer: 32, 33, 36, 37, 42, 43, 46, 47, 62, 63, 64, 65, 66, 67. Für den Fall eines Bretts von 121 Feldern hat

1) T. III, 1896, p. 58: Question 786.

Ericsson (Pseudonym)[1]) eine interessante Lösung mit 22 Springern angegeben, die wir in Fig. 33 wiedergeben.

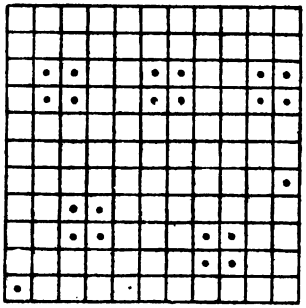


Fig. 33.

Von Königen schließlich sind bei Angriffsforderung[2]) 12 (Stellung z. B.: 22, 23, 26, 27, 42, 43, 46, 47, 72, 73, 76, 77), ohne diese Bedingung resp. bei Angriffsverbot dagegen nur 9 (z. B.: 22, 25, 27, 42, 45, 47, 72, 75, 77) erforderlich.

---

1) Intermédiaire des mathématiciens, t. V, 1898, p. 230. Ericsson verbürgt sich jedoch nicht dafür, daß dies die Minimalzahl wirklich ist (zuvor waren als Minimalzahl für denselben Fall von anderen Autoren der Reihe nach 29, 27, 23 angegeben; s. ibid. t. IV, p. 15—17, 254; t. V, p. 87).

2) Siehe M. Lange, „Maxima und Minima", Schachzeitung XIX, 1864, p. 78.

Anhang.

Lösungen des Hauptproblems für das gewöhnliche Schachbrett.

Von K. von Szily.

Zeichenerklärung: Die 91 Lösungen des Nebenproblems *V* sind durch einmalige, die 56 des Nebenproblems *F* durch zweimalige Unterstreichung der laufenden Nummer gekennzeichnet; daneben sind alle 61 symmetrischen Lösungen durch eine gewellte Linie unterhalb der laufenden Nummer hervorgehoben.

1) 11. 12. 26. 51. 65.
2) 11. 12. 46. 54. 65.
3) 11. 12. 46. 57. 65.
4) 11 13. 27. 52. 75.
5) 11. 13. 37. 51. 75.
6) 11. 13. 37. 52. 75.
7) 11. 13. 37. 53. 75
8) 11. 13. 45. 56. 82.
9) 11. 14. 17. 46. 74.
10) 11. 14. 28 52. 85.
11) 11. 14. 46. 63. 78.
12) 11. 15. 36. 57. 73.
13) 11. 15. 54. 56. 64.
14) 11. 15. 54. 68. 83.
15) 11. 15. 56. 63. 82.
16) 11. 16. 28. 65. 75.
17) 11. 16. 46. 73. 76.
18) 11. 17. 28. 54. 86.
19) 11. 18. 24. 53. 87.
20) 11. 18. 53. 64. 65.
21) 11. 22. 33. 57. 75.
22) 11. 22. 36. 65. 75.
23) 11. 22. 38. 54. 76.
24) 11. 22. 46. 56. 85.
25) 11. 22. 46. 57. 74.
26) 11. 22. 46. 64. 88.
27) 11. 23. 32. 46. 85.
28) 11. 23. 32. 47. 86.
29) 11. 23. 32. 48. 75.
30) 11. 23. 32. 48. 84.
31) 11. 23. 32. 57. 75.
32) 11. 23. 34. 42. 67.
33) 11. 23. 35. 42. 54.
34) 11. 23. 35. 46. 54.
35) 11. 23. 36. 62. 84.
36) 11. 23. 37. 52. 66.
37) 11. 23. 37. 62. 76.
38) 11. 23. 38. 42. 87.
39) 11. 23. 38. 52. 86.
40) 11. 23. 46. 53. 88.
41) 11. 23. 46. 54. 65.
42) 11. 23. 46. 67. 74.
43) 11. 23. 47. 62. 76.
44) 11. 23. 47. 63. 85.
45) 11. 23. 47. 65. 82.
46) 11. 23. 48. 62. 76.
47) 11. 23. 48. 63. 85.
48) 11. 23. 56. 57. 82.
49) 11. 23. 58. 65. 82.
50) 11. 23. 58. 75. 82.
51) 11. 23. 58. 82. 85.
52) 11. 23. 68. 72. 87.
53) 11. 24. 33. 42. 67.
54) 11. 24. 35. 58. 83.
55) 11. 24. 37. 53. 75.
56) 11. 24. 37. 63. 76.
57) 11. 24. 38. 63. 85.
58) 11. 24. 38. 63. 86.
59) 11. 24. 38. 73. 85.
60) 11. 24. 42. 47. 74.
61) 11. 24. 45. 56. 82.
62) 11. 24. 45. 58. 82.
63) 11. 24. 47. 52. 75.
64) 11. 24. 47. 52. 76.
65) 11. 24. 47. 52. 77.
66) 11. 24. 47. 62. 75.
67) 11. 24. 47. 62. 76.
68) 11. 24. 47. 72. 75.
69) 11. 24. 47. 72. 83.
70) 11. 24. 47. 72. 86.
71) 11. 24. 47. 73. 82.
72) 11. 24. 48. 62. 86.
73) 11. 24. 57. 72. 83.
74) 11. 24. 58. 65. 82.
75) 11. 24. 58. 72. 87.
76) 11. 24. 63. 78. 87.
77) 11. 25. 28. 52. 85.
78) 11. 25. 28. 52. 87.
79) 11. 25. 28. 65. 75.
80) 11. 25. 37. 56. 62.
81) 11. 25. 37. 64. 74.
82) 11. 25. 37. 65. 75.
83) 11. 25. 37. 72. 86.
84) 11. 25. 38. 54. 64.
85) 11. 25. 38. 64. 77.
86) 11. 25. 43. 67. 83.
87) 11. 25. 46. 65. 73.
88) 11. 25. 46. 65. 75.
89) 11. 25. 47. 56. 62.
90) 11. 25. 47. 62. 76.
91) 11. 25. 47. 62. 87.
92) 11. 25. 47. 63. 87.
93) 11. 25. 47. 64. 72.
94) 11. 25. 47. 64. 76.
95) 11. 25. 47. 72. 86.
96) 11. 25. 48. 65. 83.
97) 11. 25. 48. 73. 76.
98) 11. 25. 53. 78. 82.
99) 11. 25. 54. 58. 82.

100) 11. 25. 54. 64. 88.
101) 11. 25. 54. 68. 82.
102) 11. 25. 54. 78. 82.
103) 11. 25. 55. 65. 75.
104) 11. 25. 56. 57. 62.
105) 11. 25. 56. 66. 82.
106) 11. 25. 56. 68. 82.
107) 11. 25. 57. 68. 72.
108) 11. 25. 57. 74. 82.
109) 11. 25. 58. 63. 82.
110) 11. 25. 58. 64. 82.
111) 11. 25. 58. 65. 82.
112) 11. 25. 58. 72. 82.
113) 11. 25. 58. 73. 82.
114) 11. 25. 58. 74. 82.
115) 11. 25. 58. 82. 83.
116) 11. 25. 58. 82. 85.
117) 11. 25. 64. 65. 75.
118) 11. 25. 64. 78. 87.
119) 11. 25. 65. 73. 75.
120) 11. 25. 65. 75. 82.
121) 11. 26. 34. 48. 83.
122) 11. 26. 34. 67. 72.
123) 11. 26. 37. 48. 63.
124) 11. 26. 37. 48. 74.
125) 11. 26. 43. 58. 73.
126) 11. 26. 43. 78. 84.
127) 11. 26. 45. 47. 62.
128) 11. 26. 46. 74. 76.
129) 11. 26. 47. 62. 74.
130) 11. 26. 48. 62. 84.
131) 11. 26. 48. 64. 82.
132) 11. 26. 48. 67. 72.
133) 11. 26. 48. 74. 87.
134) 11. 26. 53. 78. 87.
135) 11. 26. 54. 58. 72.
136) 11. 26. 54. 64. 74.
137) 11. 26. 54. 65. 72.
138) 11. 26. 56. 62. 65.
139) 11. 26. 56. 62. 76.
140) 11. 26. 56. 64. 76.
141) 11. 26. 56. 65. 82.
142) 11. 26. 62. 73. 87.
143) 11. 26. 65. 67. 82.
144) 11. 26. 67. 72. 83.
145) 11. 27. 33. 58. 64.
146) 11. 27. 38. 43. 84.
147) 11. 27. 38. 53. 86.
148) 11. 27. 38. 63. 86.
149) 11. 27. 38. 73. 82.
150) 11. 27. 43. 65. 88.
151) 11. 27. 43. 67. 85.
152) 11. 27. 57. 64. 87.
153) 11. 27. 58. 64. 65.
154) 11. 28. 34. 65. 75.
155) 11. 28. 35. 45. 85.
156) 11. 28. 35. 65. 82.
157) 11. 28. 36. 53. 85.
158) 11. 28. 37. 53. 75.
159) 11. 28. 37. 63. 86.
160) 11. 28. 43. 45. 84.
161) 11. 28. 43. 66. 75.
162) 11. 28. 44. 53. 76.
163) 11. 28. 44. 54. 85.
164) 11. 28. 44. 66. 82.
165) 11. 28. 45. 53. 54.
166) 11. 28. 45. 54. 82.
167) 11. 28. 45. 54. 84.
168) 11. 28. 45. 56. 82.
169) 11. 28. 45. 63. 87.
170) 11. 28. 45. 75. 82.
171) 11. 28. 46. 54. 65.
172) 11. 28. 46. 64. 82.
173) 11. 28. 53. 54. 58.
174) 11. 28. 53. 54. 65.
175) 11. 28. 53. 54. 67.
176) 11. 28. 53. 54. 87.
177) 11. 28. 54. 64. 65.
178) 11. 28. 54. 65. 75.
179) 11. 28. 54. 65. 86.
180) 11. 28. 56. 65. 75.
181) 11. 28. 56. 65. 82.
182) 11. 33. 36. 68. 85.
183) 11. 33. 44. 55. 77.
184) 11. 33. 55. 66. 77.
185) 11. 34. 36. 64. 84.
186) 11. 34. 46. 54. 65.
187) 11. 34. 46. 54. 84.
188) 11. 34. 46. 57. 63.
189) 11. 34. 46. 63. 76.
190) 11. 34. 46. 63. 78.
191) 11. 34. 46. 63. 85.
192) 11. 34. 46. 67. 73.
193) 11. 34. 47. 64. 76.
194) 11. 34. 47. 73. 86.
195) 11. 34. 48. 54. 84.
196) 11. 34. 48. 63. 85.
197) 11. 34. 48. 63. 86.
198) 11. 34. 48. 63. 87.
199) 11. 34. 48. 67. 83.
200) 11. 34. 48. 73. 87.
201) 11. 34. 58. 63. 86.
202) 11. 34. 67. 78. 86.
203) 11. 34. 68. 77. 86.
204) 11. 35. 37. 45. 85.
205) 11. 35. 37. 53. 73.
206) 11. 35. 37. 53. 74.
207) 11. 35. 37. 53. 75.
208) 11. 35. 38. 63. 86.
209) 11. 35. 45. 46. 85.
210) 11. 35. 45. 55. 85.
211) 11. 35. 45. 58. 84.
212) 11. 35. 45. 64. 85.
213) 11. 35. 45. 73. 85.
214) 11. 35. 46. 54. 56.
215) 11. 35. 46. 57. 73.
216) 11. 35. 46. 63. 88.
217) 11. 35. 46. 67. 74.
218) 11. 35. 47. 56. 73.
219) 11. 35. 48. 63. 86.
220) 11. 35. 53. 78. 87.
221) 11. 35. 57. 64. 73.
222) 11. 35. 57. 73. 75.
223) 11. 35. 57. 73. 86.
224) 11. 35. 58. 63. 86.
225) 11. 36. 45. 57. 73.
226) 11. 36. 45. 58. 84.
227) 11. 36. 46. 56. 84.
228) 11. 36. 46. 73. 85.

229) 11. 36. 48. 56. 84.
230) 11. 36. 48. 63. 84.
231) 11. 36. 57. 73. 75.
232) 11. 36. 58. 64. 83.
233) 11. 36. 63. 68. 86.
234) 11. 37. 44. 78. 85.
235) 11. 37. 45. 56. 64.
236) 11. 37. 45. 58. 84.
237) 11. 37. 45. 64. 85.
238) 11. 37. 46. 55. 73.
239) 11. 37. 57. 73. 75.
240) 11. 38. 45. 56. 84.
241) 11. 45. 46. 54. 65.
242) 11. 45. 46. 57. 65.
243) 11. 45. 48. 54. 84.
244) 11. 45. 56. 64. 65.
245) 11. 45. 56. 64. 76.
246) 11. 45. 56. 64. 87.
247) 11. 46. 57. 65. 78.
248) 11. 56. 68. 75. 87.
249) 12. 14. 21. 57. 83.
250) 12. 14. 37. 61. 86.
251) 12. 14. 53. 68. 87.
252) 12. 15. 48. 72. 86.
253) 12. 16. 38. 54. 74.
254) 12. 17. 51. 65. 66.
255) 12. 21. 26. 58. 73.
256) 12. 21. 33. 46. 85.
257) 12. 21. 33. 47. 86.
258) 12. 21. 33. 48. 75.
259) 12. 21. 33. 48. 84.
260) 12. 21. 33. 57. 75.
261) 12. 21. 34. 57. 83.
262) 12. 21. 35. 44. 58.
263) 12. 21. 35. 67. 84.
264) 12. 21. 35. 68. 74.
265) 12. 21. 35. 68. 83.
266) 12. 21. 36. 57. 84.
267) 12. 21. 36. 58. 74.
268) 12. 21. 36. 63. 66.
269) 12. 21. 36. 66. 83.
270) 12. 21. 37. 48. 83.
271) 12. 21. 37. 54. 86.
272) 12. 21. 37. 64. 85.
273) 12. 21. 38. 45. 75.
274) 12. 21. 38. 54. 76.
275) 12. 21. 38. 55. 64.
276) 12. 21. 38. 55. 66.
277) 12. 21. 38. 55. 83.
278) 12. 21. 38. 55. 85.
279) 12. 21. 38. 56. 74.
280) 12. 21. 38. 64. 67.
281) 12. 21. 38. 64. 75.
282) 12. 21. 38. 64. 87.
283) 12. 21. 38. 66. 75.
284) 12. 21. 38. 66. 83.
285) 12. 21. 46. 55. 74.
286) 12. 21. 47. 55. 66.
287) 12. 21. 47. 66. 75.
288) 12. 21. 55. 56. 66.
289) 12. 21. 55. 58. 85.
290) 12. 21. 68. 77. 86.
291) 12. 22. 26. 51. 65.
292) 12. 22. 46. 51. 65.
293) 12. 22. 46. 53. 83.
294) 12. 23. 31. 44. 67.
295) 12. 23. 35. 67. 84.
296) 12. 24. 31. 43. 55.
297) 12. 24. 31. 65. 78.
298) 12. 24. 33. 41. 76.
299) 12. 24. 33. 41. 85.
300) 12. 24. 38. 63. 77.
301) 12. 24. 41. 56. 77.
302) 12. 24. 47. 75. 83.
303) 12. 24. 58. 61. 77.
304) 12. 25. 31. 66. 84.
305) 12. 25. 35. 74. 84.
306) 12. 25. 47. 51. 66.
307) 12. 25. 47. 53. 86.
308) 12. 26. 31. 57. 83.
309) 12. 26. 33. 51. 65.
310) 12. 26. 33. 57. 63.
311) 12. 26. 38. 57. 63.
312) 12. 26. 42. 57. 83.
313) 12. 26. 43. 56. 86.
314) 12. 26. 44. 51. 65.
315) 12. 26. 51. 55. 65.
316) 12. 26. 51. 65. 66.
317) 12. 26. 51. 65. 68.
318) 12. 26. 51. 65. 77.
319) 12. 26. 51. 65. 78.
320) 12. 26. 51. 65. 86.
321) 12. 26. 51. 65. 87.
322) 12. 26. 51. 66. 83.
323) 12. 26. 51. 83. 86.
324) 12. 26. 52. 83. 86.
325) 12. 26. 55. 61. 83.
326) 12. 26. 56. 63. 86.
327) 12. 26. 57. 61. 83.
328) 12. 26. 58. 63. 86.
329) 12. 27. 31. 46. 85.
330) 12. 27. 33. 68. 74.
331) 12. 27. 38. 41. 75.
332) 12. 27. 41. 53. 86.
333) 12. 27. 41. 55. 86.
334) 12. 27. 41. 63. 85.
335) 12. 27. 41. 68. 73.
336) 12. 27. 42. 62. 85.
337) 12. 27. 43. 58. 75.
338) 12. 27. 43. 61. 85.
339) 12. 27. 44. 53. 65.
340) 12. 27. 44. 53. 67.
341) 12. 27. 44. 61. 76.
342) 12. 27. 46. 51. 85.
343) 12. 27. 46. 53. 83.
344) 12. 27. 48. 53. 65.
345) 12. 27. 51. 65. 66.
346) 12. 27. 52. 53. 66.
347) 12 27. 53. 63. 66.
348) 12. 27. 53. 66. 74.
349) 12. 27. 53. 66. 85.
350) 12. 27. 53. 68. 74.
351) 12. 27. 53. 68. 85.
352) 12. 27. 55. 61. 75.
353) 12. 27. 55. 63. 75.
354) 12. 28. 31. 43. 75.
355) 12. 28. 31. 64. 87.
356) 12. 28. 31. 65. 66.
357) 12. 28. 33. 71. 87.

358) 12. 28. 41. 55. 86.
359) 12. 28. 43. 54. 75.
360) 12. 28. 51. 65. 66.
361) 12. 28. 53. 63. 87.
362) 12. 31. 46. 52. 87.
363) 12. 31. 46. 57. 85.
364) 12. 31. 46. 72. 85.
365) 12. 31. 47. 64. 86.
366) 12. 33. 45. 66. 78.
367) 12. 33. 46. 72. 85.
368) 12. 34. 37. 62. 85.
369) 12. 34. 45. 56. 78.
370) 12. 34. 46. 53. 87.
371) 12. 34. 47. 73. 86.
372) 12. 34. 48. 53. 87.
373) 12. 34. 56. 63. 78.
374) 12. 34. 58. 63. 76.
375) 12. 35. 37. 52. 86.
376) 12. 35. 41. 55. 87.
377) 12. 35. 43. 54. 68.
378) 12. 35. 46. 52. 87.
379) 12. 35. 46. 57. 83.
380) 12. 35. 46. 67. 84.
381) 12. 35. 48. 67. 84.
382) 12. 35. 48. 72. 84.
383) 12. 35. 54. 68. 74.
384) 12. 35. 58. 63. 86.
385) 12. 35. 58. 63. 87.
386) 12. 36. 43. 58. 74.
387) 12. 36. 44. 55. 65.
388) 12. 36. 44. 64. 84.
389) 12. 36. 44. 67. 73.
390) 12. 36. 44. 68. 84.
391) 12. 36. 46. 73. 83.
392) 12 36. 52. 74. 78.
393) 12. 36. 53. 68. 85.
394) 12. 36. 54. 63. 78.
395) 12. 36. 54. 68. 74.
396) 12. 36. 55. 61. 84.
397) 12. 36. 58. 65. 74.
398) 12. 36. 58. 74. 83.
399) 12. 36. 61. 73. 84.
400) 12. 36. 68. 73. 84.
401) 12. 37. 41. 57. 85.
402) 12. 37. 41. 64. 85.
403) 12. 37. 44. 61. 76.
404) 12. 37. 44. 61. 85.
405) 12. 37. 44. 62. 85.
406) 12. 37. 45. 68. 73.
407) 12. 37. 46. 51. 85.
408) 12. 37. 48. 51. 85.
409) 12. 37. 51. 65. 66.
410) 12. 37. 51. 65. 77.
411) 12. 37. 51. 65. 84.
412) 12. 37. 52. 74. 86.
413) 12. 37. 53. 64. 85.
414) 12. 37. 53. 68. 85.
415) 12. 37. 54. 61. 84.
416) 12. 37. 54. 61. 85.
417) 12. 37. 54. 61. 86.
418) 12. 37. 54. 62. 85.
419) 12. 37. 56. 61. 84.
420) 12. 37. 58. 61. 64.
421) 12. 37. 58. 61. 84.
422) 12. 37. 61. 64. 85.
423) 12. 37. 64. 73. 85.
424) 12. 38. 43. 44. 84.
425) 12. 38. 43. 51. 86.
426) 12. 38. 43. 54. 76.
427) 12. 38. 44. 51. 85.
428) 12. 38. 44. 65. 84.
429) 12. 38. 45. 51. 86.
430) 12. 38. 51. 65. 66.
431) 12. 38. 52. 54. 76.
432) 12. 38. 52. 74. 86.
433) 12. 38. 52. 76. 84.
434) 12. 38. 53. 68. 85.
435) 12. 38. 54. 61. 76.
436) 12. 41. 55. 56. 57.
437) 12. 42. 48. 65. 72.
438) 12. 42. 48. 72. 85.
439) 12. 43. 48. 54. 75.
440) 12. 44. 54. 64. 65.
441) 12. 44. 58. 61. 77.
442) 12. 45. 53. 64. 78.
443) 12. 45. 56. 64. 77.
444) 12. 45. 68. 73. 86.
445) 12. 46. 47. 51. 85.
446) 12. 46. 47. 53. 83.
447) 12. 46. 51. 65. 77.
448) 12. 46. 54. 75. 83.
449) 12. 46. 57. 61. 83.
450) 12. 46. 57. 75. 83.
451) 12. 47. 51. 55. 66.
452) 12. 47. 51. 68. 76.
453) 12. 47. 51. 68. 86.
454) 12. 47. 53. 64. 85.
455) 12. 47. 53. 64. 86.
456) 12. 47. 53. 68. 85.
457) 12. 47. 53. 68. 86.
458) 12. 48. 54. 63. 75.
459) 12. 48. 54. 75. 83.
460) 12. 48. 57. 63. 75.
461) 12. 48. 63. 75. 84.
462) 12. 52. 68. 77. 86.
463) 12. 53. 57. 58. 63.
464) 12. 55. 56. 57. 61.
465) 13. 15. 37. 51. 77.
466) 13. 16. 43. 73. 85.
467) 13. 22. 27. 52. 75.
468) 13. 22. 31. 44. 67.
469) 13. 22. 31. 45. 54.
470) 13. 22. 31. 45. 85.
471) 13. 22. 31. 47. 74.
472) 13. 22. 31. 48. 65.
473) 13. 22. 31. 48. 76.
474) 13. 22. 31. 57. 75.
475) 13. 22. 31. 58. 85.
476) 13. 22. 34. 41. 76.
477) 13. 22. 34. 41. 85.
478) 13. 22. 37. 51. 75.
479) 13. 22. 47. 72. 84.
480) 13. 22. 48. 61. 76.
481) 13. 25. 31. 76. 84.
482) 13. 25. 32. 76. 84.
483) 13. 25. 37. 51. 77.
484) 13. 25. 47. 72. 84.
485) 13. 25. 47. 76. 84.
486) 13. 25. 48. 76. 84.

487) 13. 26. 31. 74. 85.
488) 13. 26. 41. 74. 85.
489) 13. 26. 52. 56. 86.
490) 13. 26. 52. 74. 85.
491) 13. 26. 62. 74. 85.
492) 13. 27. 31. 56. 84.
493) 13. 27. 31. 58. 64.
494) 13. 27. 33. 52. 75.
495) 13. 27. 41. 56. 84.
496) 13. 27. 41. 58. 64.
497) 13. 27. 41. 67. 85.
498) 13. 27. 42. 44. 67.
499) 13. 27. 44. 52. 75.
500) 13. 27. 44. 52. 76.
501) 13. 27. 44. 62. 76.
502) 13. 27. 45. 62. 85.
503) 13. 27. 48. 52. 75.
504) 13. 27. 51. 76. 84.
505) 13. 27. 52. 55. 75.
506) 13. 27. 52. 66. 72.
507) 13. 27. 52. 66. 73.
508) 13. 27. 52. 66. 74.
509) 13. 27. 52. 66. 75.
510) 13. 27. 52. 66. 76.
511) 13. 27. 52. 66. 77.
512) 13. 27. 52. 68. 74.
513) 13. 27. 52. 74. 84.
514) 13. 27. 52. 75. 77.
515) 13. 27. 52. 75. 84.
516) 13. 27. 52. 76. 84.
517) 13. 31. 37. 55. 78.
518) 13. 31. 44. 55. 77.
519) 13. 31. 55. 66. 77.
520) 13. 32. 58. 66. 72.
521) 13. 33. 37. 51. 75.
522) 13. 35. 37. 51. 77.
523) 13. 35. 42. 54. 68.
524) 13. 35. 46. 51. 77.
525) 13. 35. 46. 54. 68.
526) 13. 36. 41. 64. 77.
527) 13. 36. 41. 68. 85.
528) 13. 36. 41. 73. 85.
529) 13. 36. 43. 58. 73.
530) 13. 36. 43. 73. 85.
531) 13. 36. 51. 68. 84.
532) 13. 37. 43. 76. 84.
533) 13. 37. 44. 51. 75.
534) 13. 37. 44. 61. 76.
535) 13. 37. 45. 51. 77.
536) 13. 37. 45. 61. 85.
537) 13. 37. 48. 51. 75.
538) 13. 37. 48. 61. 76.
539) 13. 37. 51. 55. 75.
540) 13. 37. 51. 55. 76.
541) 13. 37. 51. 55. 77.
542) 13. 37. 51. 65. 77.
543) 13. 37. 51. 66. 75.
544) 13. 37. 51. 75. 77.
545) 13. 37. 51. 75. 84.
546) 13. 37. 51. 77. 85.
547) 13. 37. 52. 54. 77.
548) 13. 37. 55. 61. 75.
549) 13. 37. 62. 76. 85.
550) 13. 38. 44. 61. 85.
551) 13. 38. 44. 61. 86.
552) 13. 44. 54. 55. 68.
553) 13. 44. 54. 58. 64.
554) 13. 45. 48. 62. 76.
555) 13. 45. 58. 64. 76.
556) 13. 46. 54. 58. 72.
557) 13. 46. 54. 65. 77.
558) 13. 48. 52. 54. 76.
559) 13 48. 52. 54. 77.
560) 13. 48. 52. 68. 76.
561) 13. 48. 54. 62. 75.
562) 13. 48. 54. 64. 75.
563) 13. 48. 54. 72. 85.
564) 13. 48. 56. 65. 72.
565) 13. 48. 65. 72. 84.
566) 13. 58. 63. 64. 76.
567) 14. 22. 48. 51. 85.
568) 14. 22. 65. 73. 84.
569) 14. 23. 32. 41. 66.
570) 14. 23 32. 41. 77.
571) 14. 23. 37. 62. 85.
572) 14. 26. 32. 58. 72.
573) 14. 26. 33. 67. 72.
574) 14. 27. 42. 65. 77.
575) 14. 27. 53. 58. 64.
576) 14. 27. 55. 63. 75.
577) 14. 27. 55. 65. 75.
578) 14. 32. 36. 58. 72.
579) 14. 32. 45. 66. 73.
580) 14. 32. 46. 58. 72.
581) 14. 32. 55. 66. 72.
582) 14. 32. 56. 58. 72.
583) 14. 32. 58. 63. 76.
584) 14. 32. 58. 66. 72.
585) 14. 32. 58. 72. 76.
586) 14. 32. 63. 66. 73.
587) 14. 33. 37. 63. 76.
588) 14. 33. 46. 63. 76.
589) 14. 33. 46. 65. 72.
590) 14. 33. 46. 72. 76.
591) 14. 33. 48. 72. 76.
592) 14. 36. 43. 58. 72.
593) 14. 36. 54. 58. 72.
594) 14. 36. 55. 65. 75.
595) 14. 37. 41. 66. 73.
596) 14. 37. 51. 65. 77
597) 14. 42. 48. 65. 72.
598) 14. 44. 54. 64. 74.
599) 14. 45. 53. 55. 65.
600) 14. 46. 51. 65. 77.
601) 22. 23. 26. 54. 65.
602) 22. 24. 27. 43. 76.
603) 22. 24. 37. 63. 76.
604) 22. 24. 47. 63. 76.
605) 22. 25. 36. 57. 74.
606) 22. 25. 47. 54. 77.
607) 22. 26. 34. 57. 63.
608) 22. 26. 45. 47. 62.
609) 22. 26. 54. 63. 74.
610) 22. 26. 54. 64. 74.
611) 22. 26. 54. 65. 74.
612) 22. 26. 54. 66. 74.
613) 22. 26. 54. 67. 74.
614) 22. 26. 57. 63. 74.
615) 22. 34. 45. 53. 65.

616) 22. 34. 45. 53. 67.
617) 22. 34. 45. 58. 77.
618) 22. 34. 45. 56. 77.
619) 22. 34. 57. 63. 75.
620) 22. 35. 54. 66. 74.
621) 22. 36. 37. 63. 73.
622) 22. 36. 45. 67. 73.
623) 22. 36. 47. 65. 73.
624) 22. 36. 57. 63. 75.
625) 22. 36. 57. 65. 74.
626) 22. 37. 54. 66. 74.
627) 22. 45. 56. 67. 74.
628) 22. 45. 57. 66. 74.
629) 23. 35. 42. 54. 66.
630) 23. 35. 46. 54. 66.
631) 23. 36. 42. 44. 67.
632) 23. 36. 44. 52. 65.
633) 23. 36. 44. 55. 65.
634) 23. 36. 44. 55. 67.
635) 23. 36. 47. 55. 62.
636) 23. 36. 62. 65. 66.
637) 33 34. 35. 46. 54.
638) 34. 44. 46. 54. 65.

Gleiche Konfigurationen weisen auf:

1	und	316	311	und	80; 348; 573	498	und	613
5	-	544	314	-	309	519	-	21
9	-	487	315	-	291	521	-	539
12	-	483	316	-	1	522	-	431
21	-	519	318	-	37; 300; 330	524	-	426
32	-	443	330	-	37; 300; 318	526	-	63
33	-	296; 629	337	-	66	537	-	545
37	-	300; 318; 330	338	-	435	539	-	521
42	-	301	348	-	80; 311; 573	543	-	478
55	-	386	353	-	127	544	-	5
63	-	526	354	-	565	545	-	537
66	-	337	359	-	564	564	-	359
80	-	311; 348; 573	369	-	183	565	-	354
97	-	434	371	-	145	573	-	80; 311; 348
127	-	353	386	-	55	582	-	253
145	-	371	397	-	221	608	-	612
158	-	398	398	-	158	609	-	611
183	-	369	426	-	524	611	-	609
221	-	397	431	-	522	612	-	608
253	-	582	434	-	97	613	-	498
262	-	469	435	-	338	615	-	630
291	-	315	437	-	9	620	-	631
296	-	33; 629	443	-	32	629	-	33; 296
300	-	37; 318; 330	469	-	262	630	-	615
301	-	42	478	-	543	631	-	620
302	-	486	483	-	12	637	-	638
309	-	314	486	-	302	638	-	637

Kapitel XI.

Der Rösselsprung.

On ne saurait étendre les bornes de l'analyse, sans qu'on ait raison de s'en promettre de très grands avantages.

L. Euler.

„Solution d'une question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse", Mém. de l'académie de Berlin XV, 1759, p. 312.

Das Schachspiel, welches .... allem Dichtersinn den Garaus zu machen völlig geeignet ist.

Goethe.

Noten und Abhandlungen zum West-östlichen Divan: „Geschichte".
Werke, Große Weimarische Ausgabe, 1. Abt., Bd. 7 (1888), p. 30/31.

Darin bin ich einmal ganz antigoethisch gesinnt. Besonders halt' ich dafür, daß das Schachspiel eine sehr nützliche Vorschule der Dramaturgie ist, und daß die Theater-Dichter wohlthun, den Rösselsprung zu studieren, damit sie das Musenrösslein auf dem Quadrate oder Rectangulum ihres Planes herumreiten lernen, ohne daß es auf schon betretene Felder komme, oder sich vor der Zeit festsetze.

Adolf Müllner.
Literatur-Blatt Nr. 41, 21. Mai 1824, p. 162.

§ 1. Aus der Geschichte des Rösselsprungs.

„Eines Tages befand ich mich in einer Gesellschaft", — so erzählt der berühmte Mathematiker Leonhard Euler[1]) (1707—1783), damals Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften, — „als bei Gelegenheit des Schachspiels jemand die Frage aufwarf, mit einem Springer bei gegebenem Anfangs-

1) „Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse", Mémoires de l'académie royale des sciences de Berlin, t. XV, 1759 (1766), p. 310 oder Commentationes arithm. coll., Petersburg 1849, Bd. I, p. 337. Die folgenden Zitate beziehen sich stets auf die erste Publikationsstelle dieser Abhandlung.

feld alle Felder des Schachbretts der Reihe nach, jedes nur einmal, zu passieren..... Diejenigen, die die Aufgabe für ziemlich leicht hielten, machten mehrere nutzlose Versuche, ohne zum Ziel zu gelangen. Hierauf gab derjenige, der die Frage aufgeworfen hatte, eine Route so an, daß eine vollständige Lösung entstand. Die Menge der Felder ließ indessen nicht zu, die gewählte Route dem Gedächtnis einzuprägen, und erst nach mehreren Versuchen gelang es mir, eine der Aufgabe genügende Route zu finden; sie galt auch nur für ein bestimmtes Anfangsfeld." Für den großen Mathematiker wurde diese Unterhaltung die Veranlassung zu einer näheren Beschäftigung mit dem Problem, dem sogenannten „Rösselsprung", von der die soeben zitierte Abhandlung zeugt; auch in seiner Korrespondenz mit anderen Mathematikern, wie dem in russischen (politischen) Diensten stehenden Christian Goldbach[1]) (1690 bis 1764) und Louis Bertrand (1731—1812) in Genf, berührte und erörterte er den Rösselsprung.

Wenn auch Euler bis dahin unbekannt war das Problem nichts weniger als neu, sondern schon viel früher, sowohl im Orient wie Okzident, behandelt worden, und wenn auch sein Ursprung nicht feststeht, so wird es nach Antonius van der Linde, dem Historiker des Schachspiels, nicht viel jünger sein als das Schachspiel selbst[2]), dessen Alter derselbe Forscher zu rund 1000 Jahren annimmt.[3]) Nach Ansicht desselben Historikers ist der Rösselsprung der Aufgabe entsprungen, alle auf der einen Hälfte des Schachbretts aufgestellten

1) Siehe den Brief vom 26. April 1757 in „Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle", t. I, 1843, p. 654/5.

2) Siehe A. v. d. Linde, „Geschichte und Litteratur des Schachspiels", Berlin 1874, II, p. 101.

3) Die verschiedentlich sich findende Angabe, indische Brahmanen hätten schon vor 2000 resp. Tausenden von Jahren Rösselsprünge gebildet, erklärt v. d. Linde demzufolge — gewiß mit Recht — für „Torheit" (l. c. I, p. 203); vgl. a. die im literar. Index (Jahr 1864) aufgeführte Schrift von Haldeman, Anhang („Bibliography of the Chess Knights Tour"), p. 37.

32 Figuren des Spiels mit einem der Springer der Reihe nach wegzuschlagen.[1]) Das älteste nachweisbare Vorkommen dieser Aufgabe und damit im grunde unseres Rösselsprunges in der europäischen Literatur stellt der lateinische Pergamentkodex Nr. 10287 der Pariser Bibliothek (erste Hälfte des XIV. Jahrhunderts) dar: Denkt man sich alle 32 Figuren des Schachspiels auf der oberen Bretthälfte aufgestellt und den einen Springer auf dem Eckfelde oben links, so läßt die Handschrift diesen Springer alle 31 übrigen Figuren der Reihe nach abschlagen in der Weise, wie die Zahlen unserer Fig. 1 dies angeben.[2])

1	22	9	26	3	30	11	32
16	19	2	23	10	25	4	29
21	8	17	14	27	6	31	12
18	15	20	7	24	13	28	5

Fig. 1.

Von hier bis zu einem vollständigen, auch über die andere Bretthälfte sich erstreckenden Rösselsprunge war dann nicht mehr weit.[3]) — Mit Beginn des 18. Jahrhunderts etwa scheint der Rösselsprung in Europa größere Verbreitung gefunden zu haben; insbesondere verbreitet und viel zitiert und reproduziert[4]) wurden die Rösselsprünge der bekannten Mathematiker[5])

---

1) Siehe v. d. Linde, I, p. 294.

2) Siehe bei v. d. Linde, I, p. 245 die Fig. 243, sowie die (freilich unvollständige) Texterklärung ebenda p. 294. — Das Spiegelbild dieses halben Rösselsprungs findet sich sodann in einem lateinischen Manuskript des Paulus Guarinus von 1512 (p. 74), sowie auch in einem um 1530 in Paris gedruckten Quartbändchen (s. liter. Index: Nr. 7), s. Max Lange, „Lehrbuch des Schachspiels", 2. Aufl. 1865, p. 202/3; v. d. Linde, l. c. I, p. 294. Weitere halbe Rösselsprünge finden sich dann in einer italienischen Papierhandschrift des 15. Jahrhunderts (s. v. d. Linde I, p. 295), sowie in dem im liter. Index aufgeführten Werke des Gianutio von 1597 (s. a. v. d. Linde ebenda, sowie hier S. 328, Anm. 1 und S. 369).

3) Siehe über ein Manuskript des Britischen Museums mit einem vollständigen Rösselsprung: (Twiss, R.) „Chess", vol. II, 1789, p. 11 und v. d. Linde, l. c. I, p. 295.

4) Wir bemerken beispielsweise, daß, in Zahlen und daneben in Diagrammform dargestellt, die gedachten 3 Rösselsprünge sich auf einer Figurentafel vereinigt in der Schrift von 1766 „Corsa del Cavallo ...", p. 9 finden.

5) Davon daß auch Bernoulli (welcher?) sich mit dem Rösselsprung-

Pierre Rémond de Montmort (1678—1719), Abraham de Moivre[1]) (1667—1754) und De Mairan (1678—1771). Wir geben von diesen Rösselsprüngen, die gewöhnlich für die ersten überhaupt ausgegeben werden, den von Moivre in Fig. 2 wieder; er ist von diesen drei am leichtesten dem Gedächtnis einzuprägen, und wir werden auf ihn später nochmals zurückkommen (S. 337 und 357 f.).

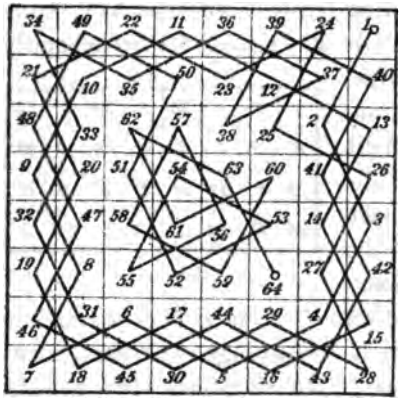


Fig. 2.

Erst in der genannten Arbeit Eulers[2]) wird man die ersten Anfänge einer Theorie des Rösselsprungs erblicken dürfen. Freilich darf man dabei mit dem Wort „Theorie" weitgehende Ansprüche nicht verknüpfen; andernfalls würde man auch heute wohl noch die Existenz einer Rösselsprungtheorie verneinen müssen. Übrigens scheint auch erst im Zusammenhange mit Eulers Untersuchungen resp. zu ihrer

problem beschäftigt habe, wie in Cte de Basterots „Traité élémentaire du jeu des échecs", 2ième éd. 1863, p. 111 und bei anderen Autoren (Volpicelli, 1874) angegeben ist, ist mir nichts bekannt.

1) In den eigenen Schriften dieser, also in Montmorts „Essai d'analyse sur les jeux de hazard" (1708, 1713) und etwa in Moivres „The doctrine of chances" (1718, 1738, 1756) sind diese Rösselsprünge offenbar nicht veröffentlicht, wenn auch diese Werke bisweilen dafür zitiert werden, — sondern vielmehr in des Ozanam († 1717) „Récréations mathém. et phys." und zwar wohl zuerst in der Ausgabe von 1725 (l. c. p. 260 ff.), wo auch der Rösselsprung von Mairan veröffentlicht ist, dem der Herausgeber des Werkes, Grandin, das Problem nebst den 3 Lösungen verdankte, wie er sagt (s. v. d. Linde, l. c. II, p. 103). Siehe a. spätere Ausgaben des Ozanamschen Werkes, z. B. die sehr verbreitete von 1790, p. 178 ff. —

2) Euler legte seine Abhandlung der Berliner Akademie am 2. März 1758 vor (s. „Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuß über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers",

Zeit der Rösselsprung in weitere Kreise gedrungen zu sein. Als „Eulerscher Rösselsprung“ figurierte er jedenfalls in dem „Zettelkasten“ Jean Pauls[1]), und als Beweis seiner „Volkstümlichkeit“ mag gelten, daß sich hinfort selbst die über den Völkern Wandelnden mit ihm beschäftigten, wie Herzog Ernst Ludwig (Ernst II.) von Sachsen-Gotha (reg. 1772 bis 1804), der ein eifriger Liebhaber der Physik und Astronomie und selbst astronomischer Schriftsteller war, die Gothaer Sternwarte auf dem Seeberg erbaut und ihr durch die Berufung von Franz v. Zach zu baldigem Ruhm verholfen hatte und der sich also, wie gesagt, auch eingehend mit unserem Rösselsprung beschäftigte und darüber eine Reihe von Tafeln stechen ließ[2]), nicht ohne dafür[3]) von Schiller mit den Spottversen gestraft zu werden:

Leipzig 1908, p. 92); sie wurde aufgenommen in die Berliner Memoiren von 1759, die 1766 ausgegeben wurden (s. S. 319, Anm. 1). — Nach einer mehrfach sich findenden Angabe (z. B. in der liter. Index aufgeführten Schrift von Solvyns resp. Slyvons, 1856, p. 5) sollte die Berliner Akademie „gegen 1759“ einen Preis von 4000 Francs auf die beste Arbeit über den Rösselsprung ausgesetzt haben, der jedoch nicht zur Verteilung gelangt sei. Der Preis konnte nicht „verteilt“ werden, weil er gar nicht ausgesetzt war; wenigstens finde ich in Adolf Harnacks „Geschichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften“, Bd. 2, 1900, Aktenstück Nr. 175, zwar alle Preisaufgaben der Zeit von 1745 bis 1788 angegeben, eine solche jedoch nicht.

1) „Gegen den Euler'schen Rösselsprung der Ratten zog er nur mit einem Schlägel zu Felde.“ Jean Paul, „Hesperus“, Zweites Heftlein, 16. Hundspostttag. — „Mit einem Euler'schen Rösselsprung war er über das Stubenschachbrett hinüber“. Derselbe, „Biogr. Belustigungen“, Buch I, Kap. 137.

2) Siehe den im liter. Index (Jahr: 1798) aufgeführten Artikel aus dem in Gotha damals herausgegebenen „Reichs-Anzeiger“. Über die Autorschaft des Herzogs s. Allg. Deutsche Biographie, Bd. VI, 1877, p. 310, wo freilich nur der Titel und Jahr, nicht die Publikationsstelle angegeben, jedoch offenbar dieser kleine Artikel resp. ein etwaiger Sonderabdruck davon gemeint ist.

3) Vgl. E. Boas, „Schiller und Goethe im Xenienkampf“, Stuttgart u. Tübingen 1851, Th. I, p. 118. Text dort wie hier oben; daneben etwas anderer Text mit Überschrift „Astronomische Schriften“.

Der astronomische Himmel.

So erhaben, so groß ist, so weit entlegen der Himmel!
Aber der Kleinigkeitsgeist fand auch bis dahin den Weg.

In der nacheulerschen Zeit nahm die Literatur über den Rösselsprung einen solchen Umfang an, daß um die Mitte des vorigen Jahrhunderts ein Autor das Rösselsprungproblem nach Mannigfaltigkeit der Lösungen resp. Lösungsversuche — in seltsamer Zusammenstellung — mit dem pythagoräischen Lehrsatze und der Parallelentheorie der Geometrie vergleichen konnte.[1]) Zugleich eroberte sich die Aufgabe das Rätselrepertoire der Familienblätter[2]), in dem sie ja auch heute noch einen ständigen Platz einnimmt.[3]) Die Fertigkeit, praktisch Rösselsprünge zu bilden, wurde von einzelnen zu einer Art Virtuosentum ausgebildet, so von dem Belgier Edm. Solvyns[4]), der im Jahre 1860 in Paris in dem berühmten Schachcafé de la Régence eine Vorführung seiner Künste veranstaltete und hierbei nach einem von ihm geheimgehaltenen Verfahren 48—50 vollständige Rösselsprünge pro Stunde bildete.[5]) Selbst Automaten, wie der im Krystallpalast in London, bildeten resp. bilden Rösselsprünge, wobei der Besucher auch noch das Ausgangsfeld beliebig vorzuschreiben berechtigt ist[6]); übrigens hatte auch schon in der Eulerschen Zeit Wolfgang von Kempelens

1) Siehe die im liter. Index aufgeführte Schrift von Glaszer (1844), p. 1.

2) Eins der ersten, wenn nicht das erste, war wohl Adolf Müllners „Mitternachtblatt für gebildete Stände", s. den ersten Jahrgang, 1826, Nr. 121, 4. Okt., p. 482 nebst Nr. 134, 3. Nov., p. 533—534.

3) Auch zur Erteilung von Patenten hat der Rösselsprung geführt: Patentschriften Nr. 21509 vom 20. März 1883 und Nr. 179770 vom 18. Dezbr. 1906; beide entbehren jedoch allen Interesses.

4) Verfasser der schon erwähnten, im liter. Index aufgeführten Schrift von 1856 (Pseudonym: Slyvons).

5) Siehe Cretainé, „Études sur le problème de la marche du cavalier au jeu des échecs", Paris 1865, p. 23, Anm. 1.

6) Siehe z. B. Jenkins in Educational Times Reprints, Bd. 41, 1884, p. 94 oder Deutsche Schachzeitung XXIV, 1869, p. 142 („Der Schachautomat im Krystallpalaste zu Sydenham bei London").

berühmter Schachautomat[1]), der vorwiegend freilich dem gewöhnlichen Schachspiel oblag, Rösselsprünge ausgeführt. Es sei der Kuriosität halber erwähnt, daß noch vor wenig mehr als 30 Jahren eine Schrift unseren so harmlosen Rösselsprung für geheime Staatsaktionen empfahl, nämlich als Geheimschrift, vermittelst deren man in gefährlichen Zeiten, in denen Kuriere überfallen und geplündert und Telegraphenleitungen zerstört würden, offen durch Zeitschriften unter der harmlosen Marke „Springerrätsel" Behörden und Magistratspersonen geheime Befehle und Nachrichten übermitteln könne, die in ihrer besonderen Form nur von eingeweihten Personen mittels eines mystischen, vom Autor nicht einmal beschriebenen Schlüssels enträtselt werden würden.[2])

§ 2. Definitionen und Vorbemerkungen.

Ein „Springerzug" besteht, wie dem Leser bekannt sein wird und wir daher in der historischen Einleitung (§ 1) als bekannt antizipiert hatten, darin, daß die Figur von ihrem Felde nach einer der beiden Seiten um 2 Felder in horizontaler und dann von hier um 1 in vertikaler Richtung resp. zuerst um 2 in vertikaler und dann um 1 in horizontaler Richtung fortschreitet. Von 2 Feldern, zwischen denen ein Übergang vermittelst eines solchen Springer- oder „Rösselzuges" möglich ist, sagt man: „sie rösseln sich". Die Maximalzahl der mit einem gegebenen Felde sich rösselnden Felder ist offenbar 8 (s. Fig. 3, die einen Teil des Schachbretts und darauf ein schraffiertes Feld mit allen dasselbe rösselnden, durch Kreuze markierten Feldern darstellt). Andere Felder des Bretts rösseln

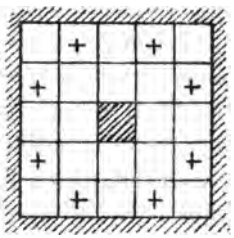


Fig. 3.

1) Siehe über ihn v. d. Linde, l. c. Bd. II, p. 337—338, sowie z. B. The Edinburgh Philosophical Journal IV, October 1820—April 1821, Nr. VIII, p. 393—398: „An attempt to Analyse the Automaton Chess Player of M. De Kempelen" (Referat über eine unter diesem Titel 1821 erschienene, im liter. Index aufgeführte Schrift von R. Willis).

2) Siehe die Schrift von G. Lauber (liter. Index: 1877), p. 36.

nur 6, 4, 3 und die Eckfelder sogar nur 2 Felder. Denken wir uns nämlich die Grenze des Brettes so, daß die erste Kolonne links in unserer Fig. 3 bereits fortfällt, so bleiben nur noch 6 der 8 Kreuze übrig; fällt auch die zweite Kolonne fort, so haben wir nur noch 4 Kreuze; fällt zugleich auch noch die oberste Zeile fort, so nur noch 3 Kreuze; fällt schließlich auch die zweitoberste Zeile noch fort, ist also das schraffierte Feld Eckfeld, so nur noch 2 Kreuze. Dasselbe gilt natürlich mit Vertauschung der Begriffe „rechts" und „links", „oben" und „unten", „Zeile" und „Kolonne".

Man sieht leicht, daß auf einem zweifarbigen Brett (s. Kap. VII, S. 172, Fig. 1) jeder Springerzug mit Farbenwechsel des Feldes verbunden ist, eine Besonderheit, die uns übrigens späterhin noch beschäftigen wird (s. S. 348).

Das erste Feld eines Rösselsprungs nennen wir „Anfangs-" oder „Ausgangsfeld", das letzte „Schlußfeld", beide gemeinsam die „Endfelder". Rösseln sich Anfangs- und Schlußfeld, so nennt man den Rösselsprung „geschlossen", anderenfalls „ungeschlossen" oder „offen". Der in § 1 wiedergegebene Moivresche Rösselsprung und ebenso auch die von Montmort und Mairan sind offen.[1]) — Sollen „Anfangs"- und „Schlußfeld" vorgeschrieben werden, so müssen sie natürlich, da der Springer mit jedem Zuge die Farbe wechselt und die Gesamtanzahl der Felder gerade ist, von verschiedener Farbe sein.

Dort, wo wir im folgenden für die Felder des Schachbretts einer Notation bedürfen, werden wir außer der in der deutschen Schachwelt gebrauchten (s. S. 172, Fig. 1) vorwiegend die im vorigen Kapitel (S. 287/8) eingeführte Vandermondesche verwenden, bei der nicht nur die Horizontalreihen (von unten nach oben), sondern auch die Vertikalreihen (von links nach rechts) mit 1, 2, ... 8 bezeichnet werden, so daß ein Feld z. B. die No-

1) Die späteren Ausgaben des Ozanamschen Werkes, z. B. die von 1790 (p. 182), geben auch einen geschlossenen Rösselsprung, herrührend von einem österreichischen Dragonerhauptmann von W. Ich habe nicht untersucht, in welcher Ozanam-Ausgabe dieser Rösselsprung sich zuerst vorfindet; eventuell sind also die bei Euler sich findenden geschlossenen Rösselsprünge älter.

tation 5, 3 führt, wenn es der fünften Vertikalen von links und der dritten Horizontalen von unten angehört.

Selbstverständlich läßt sich die Frage nach einem Rösselsprung nicht bloß für das gewöhnliche Schachbrett der 64 Felder stellen, sondern auch für andere quadratische, rechteckige oder sonstwie geformte Bretter, so daß wir im weiteren das Problem häufig allgemeiner, wenn auch stets unter vorwiegender Berücksichtigung des gewöhnlichen Schachbretts, auffassen werden.

§ 3. Eine Aufgabe des Guarinus.

Bevor wir zu der eigentlichen Besprechung des Rösselsprungproblems übergehen, wollen wir eine verwandte Aufgabe aus dem schon (S. 321, Anm. 2) zitierten, dem Anfange des XVI. Jahrhunderts angehörenden Manuskript des Guarinus behandeln[1]): Auf den 4 Eckfeldern eines Brettes von 9 Feldern (s. Fig. 4) stehen 2 weiße und 2 schwarze Springer; man soll die weißen Springer auf die Felder der schwarzen bringen und umgekehrt.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fig. 4.

Stehen die Springer gleicher Farbe auf benachbarten Eckfeldern, also etwa die weißen auf 1 und 3 und die schwarzen auf 7 und 9, so tue man folgende Züge:

1—8; 3—4; 9—2; 7—6; 4—9; 6—1; 2—7; 8—3.

Jetzt befinden sich also die weißen Springer auf 3 und 9 und die schwarzen auf 1 und 7; der Effekt ist somit derselbe, als wenn wir das Brett um 90° im Sinne des Uhrzeigers gedreht hätten. Da nun die gewünschte Stellung aus der ursprünglichen offenbar durch eine Drehung um 180° hervorgeht, so brauchen wir nur noch einmal dieselben Züge zu tun wie oben. — Stehen die Springer derselben Farbe ursprünglich aber auf gegenüberliegenden Eckfeldern, so bewirkt bereits die Drehung um 90° das Verlangte.

1) Nr. 42 des Manuskripts. Ich schöpfe aus Lucas, „Récréations", t. IV, p. 207.

§ 4. Eulersche Rösselsprünge.

Schon in Fig 1 gaben wir einen Rösselsprung an, der sich über alle Felder des halben Schachbretts erstreckt. Fig. 5 zeigt uns zwei solcher halben Rösselsprünge, die jedoch, da die Felder 32 und 33 sich rösseln, so beschaffen sind, daß sie eine Durchlaufung des ganzen Brettes, — erst der unteren, dann der oberen Bretthälfte, — in *einem* Zuge gestatten. Zusammen bilden also die beiden halben Rösselsprünge einen vollständigen. Wir wollen einen so zusammengesetzten Rösselsprung hinfort einen „zweiteiligen" nennen; der vorliegende ist der Abhandlung Eulers entnommen[1]).

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Fig. 5.

Da auch die Felder 1 und 64 sich rösseln, so ist dieser Rösselsprung geschlossen, d. h. ermöglicht einen Übergang von dem Schlußfeld zum Ausgangsfeld zurück. Mit der Existenz *eines* geschlossenen Rösselsprungs ist zugleich der Nachweis erbracht, daß auch bei beliebigem Ausgangsfeld stets ein Rösselsprung existiert; um z. B. einen solchen mit 19 als Anfangsfeld zu erhalten, braucht man ja nur die Felder 19—64 in alter Weise zu durchlaufen, von 64 zu 1 zu gehen und dann die Felder 1—18 wieder in alter Weise zu passieren. Es ist damit sogar gezeigt[2]), daß es bei beliebigem Ausgangsfeld sogar mindestens 2 Rösselsprünge gibt, da ein geschlossener Rössel-

1) Euler, l. c p. 330 (§ 33). — Der Rösselsprung ist dem schon oben (S. 321, Anm. 2) zitierten (halben) Rösselsprung des Gianutio übrigens eng verwandt. Man braucht in Fig. 5 die Kette 1—8 nur in entgegengesetzter Richtung: als 1, 8, 7, ... 3, 2 zu durchlaufen, darauf dann 15, 14, ... 10, 9 anzuschließen und zum Schluß die zweite Hälfte (16—32) ohne Veränderung hinzuzunehmen, so hat man den Rösselsprung des Gianutio.

2) Euler, l. c. p. 313 (§ 8).

sprung natürlich eine Durchlaufung der Felder in zwiefacher Reihenfolge gestattet, nämlich neben der Durchlaufung im Sinne der Pfeilspitze (s. Fig. 6) auch die in umgekehrtem Sinne.

Der Genfer Mathematiker Louis Bertrand, ein Schüler und Freund Eulers, mit dem dieser, wie schon oben gesagt, u. a. auch über das Rösselsprungproblem korrespondierte, machte den großen Mathematiker auf ein Prinzip aufmerksam[1]), nach dem sich aus einem fertigen Rösselsprunge eine Reihe anderer herleiten lassen. In dem obigen Rösselsprunge der Figur 5 können wir z. B., da 64 und 55 sich rösseln, von 55 direkt zu 64 und von hier über 63, 62 usw. zu 56 springen, so daß dies letztere jetzt Schlußfeld wird. Sollte also z. B. das Eckfeld 50 Schlußfeld werden, so ließe sich ein solcher Rösselsprung aus dem zuletzt angegebenen leicht herleiten, da 49 sowohl das bisherige Schlußfeld 56, wie das verlangte 50 rösselt, wir also nur nach Durchlaufung von 1—49 zu 56, 57, ... 64 und von hier zu 55, 54, ... 50 zu gehen hätten. — Die Betrachtung der Figur 7 führt uns dazu, das Bertrandsche Transformationsprinzip, unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Umkehrbarkeit der „Springer-" oder „Rösselkette", wie wir sagen wollen, so auszusprechen:

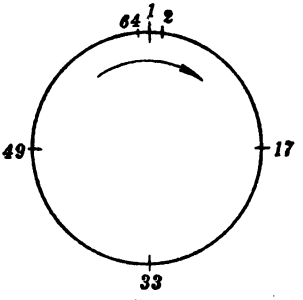


Fig. 6.

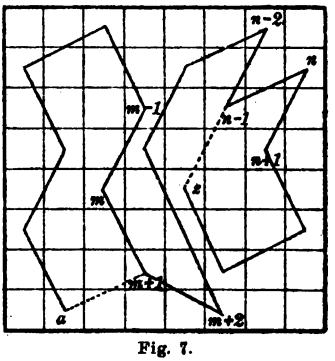


Fig. 7.

Aus jeder Rösselkette mit dem Anfangsfeld *a* und dem Schlußfeld *z* lassen sich weitere Rösselketten mit folgenden Anfangsfeldern herleiten:

---

1) Euler, l. c. p. 311/312 (§ 5).

1) mit s, dem bisherigen Schlußfeld (durch bloße Umkehrung),

2) mit allen Feldern m, wenn $m+1$ und a sich rösseln; die neue Rösselkette ist dann: m, $m-1$, ... a, $m+1$, $m+2$, ... s,

3) mit allen Feldern n, wenn s und $n-1$ sich rösseln; die neue Rösselkette ist dann: n, $n+1$, ... s, $n-1$, $n-2$, ... a.

Auf dieses Bertrandsche Prinzip gründet sich Eulers Methode[1]) zur Konstruktion vollständiger Rösselsprünge. Er empfiehlt, die Felder zunächst so weit zu füllen, wie man bei willkürlichem Fortschreiten kommt. Dabei wird dann im allgemeinen eine Anzahl von Feldern unausgefüllt bleiben. Ist a z. B. ein solches Feld, so formt Euler den unvollkommenen Rösselsprung in der oben auseinandergesetzten Weise so um, daß ein solches Feld Schlußfeld wird, welches a rösselt, schließt dann an dieses das Feld a an und fährt nun in dieser Weise fort, bis alle Felder besetzt sind. Daß es unter den unausgefüllten Feldern stets ein solches a, das sich mit einem bereits ausgefüllten rösselt, geben muß, ist ohne weiteres ersichtlich. Denn andernfalls müßten sich die Brettfelder in 2 resp. mehrere Klassen teilen derart, daß ein Springerzug nie von einem Felde einer Klasse zu einem einer anderen führte, eine Konsequenz, deren Unmöglichkeit bereits durch die Angabe *eines* vollständigen Rösselsprungs (Fig. 5) erwiesen ist.

Von einer systematischen Methode ist dieses Verfahren Eulers natürlich noch weit entfernt; wir haben uns daher darauf beschränkt, es nur kurz zu skizzieren[2]), wenn es auch

---

1) Euler, l. c. p. 317 ff. (§ 15 ff.)

2) Reproduktionen der Eulerschen Untersuchungen finden sich an vielen Stellen: außer in umfangreicheren Darstellungen des Rösselsprungproblems und außer an den im literar. Index zu der Originalabhandlung (Jahr 1759) angemerkten Stellen z. B. noch bei Legendre,

für die weitere Entwicklung der Theorie von großer Bedeutung gewesen ist.

Wir wenden uns jedoch nochmals dem Rösselsprung der Fig. 5 zu, um auf eine Besonderheit von ihm hinzuweisen: Fassen wir irgend zwei Felder, die bei Drehung des Brettes um 180° ineinander übergehen würden — irgend zwei „gegenüberliegende" Felder, wie wir sagen wollen — ins Auge, z. B. 37 und 5; 36 und 4; 20 und 52 usw., so werden wir als Differenz der beiden so erhaltenen Zahlen stets 32 finden[1]). Feld 1 geht also bei Drehung um 180° in Feld 33, Feld 2 in 34, 3 in 35 usw., schließlich Feld 32 in 64 über oder mit anderen Worten: bei Drehung um 180° geht die erste Hälfte des Rösselsprungs in die zweite über. Da der Rösselsprung geschlossen ist und Linie 1—64 auch zu 33—32 symmetrisch ist, so ist es offenbar gleichgültig, welche Stelle des geschlossenen Rösselsprungs wir als Anfang ansehen: stets besteht der Rösselsprung aus zwei symmetrischen Hälften, deren Symmetrie darin liegt, daß sie bei Drehung des Brettes um 180° in einander übergehen. Unser Rösselsprung ist also in bezug auf die Brettmitte (Schnittpunkt der Diagonalen) symmetrisch, d. h. wenn wir durch die Brettmitte irgend eine gerade, das Quadrat in zwei kongruente Trapeze zerlegende Linie ziehen, so wird durch diese Linie der Rösselsprung in zwei Teile geteilt, die sich, wenn der eine um 180° gedreht wird, vollständig decken. Figuren 8 und 9 (S. 332) stellen die Diagramme von zwei weiteren solchen symmetrischen Rösselsprüngen dar.

„Théorie des nombres", t. II, 2^te Ausg., p. 151 oder 3^te Ausg., p. 187; Deutsche Übersetzung v. Maser, Bd. II, 1893, p. 146—160; ferner bei Andrew Frost, „A simple method of tracing paths of a Knight", Quart. J. of Math. XIV, 1877, p. 354—359 etc.

1) Außerdem weisen, was uns hier freilich nicht besonders interessiert, in jeder der beiden Bretthälften, diese für sich betrachtet, je zwei „gegenüberliegende" Felder zwischen ihren Zahlen die konstante Differenz 4 auf, z. B. 1 und 5; 15 und 11; 17 und 21; 36 und 40 usw.

Euler hat sich mit der Konstruktion solcher symmetrischer Rösselsprünge systematisch beschäftigt[1]) und verfuhr

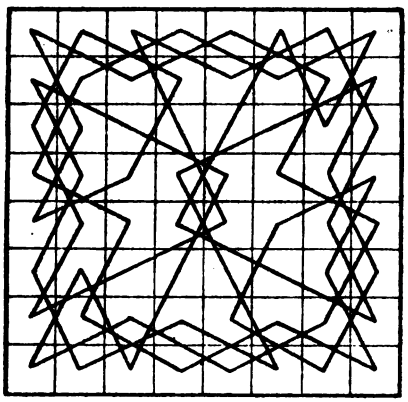


Fig. 8.

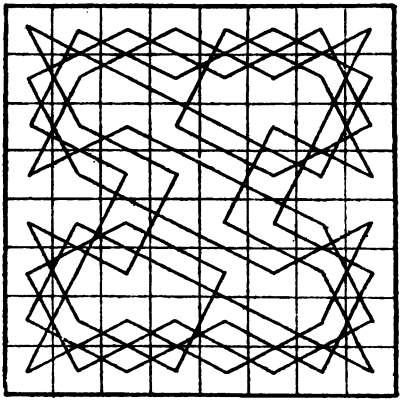


Fig. 9.

hierbei so: Wenn er in ein Feld „1" setzte, so setzte er zugleich in das „gegenüberliegende" Feld die „33", zu der „2" in in das „gegenüberliegende" die „34" usw. So mußten notwendig zwei symmetrische Rösselketten entstehen. Dabei geschah, wenn Felder unberührt blieben, die Abänderung nach dem Bertrandschen Prinzip, natürlich unter Vornahme derselben Transformationen in beiden Rösselketten (1, 2, ... einerseits; 33, 34 ... andererseits).

				7	10	19	28
				20	27	6	9
				11	8	29	18
				26	21	12	5
				13	4	17	30
			33	22	25	14	1
				3	16	31	24
				32	23	2	15

Fig. 10.

Als Gegenstück zu dem Eulerschen Rösselsprung der Fig. 5, der sich uns als „geschlossen, zweiteilig und symmetrisch" darstellte, wollen wir noch auf den Rösselsprung der Fig. 10 hinweisen, der auch zweiteilig, jedoch offen und nicht symmetrisch ist, dafür aber die Besonderheit

1) Euler, l. c. p. 324 ff. (§ 24 ff.). — Euler, der bereits in dem S. 320, Anm. 1 zitierten Brief an Goldbach vom 26. April 1757 einen symmetri-

aufweist, daß die linke Hälfte sich einfach durch Parallelverschiebung der rechten ergibt, so daß wir die erstere in der Figur fortlassen durften[1]).

§ 5. Das Warnsdorfsche Verfahren.

Vergnügter hat nicht Archimedes sein freudiges εὕρηκα ausgerufen, da ein Zufall ihm den Ansatz zur Lösung der Aufgabe wegen der Krone des Königs Hiero darbot, als ich auf die erste Auflösung hinblickte, welche ich nach meiner aufgestellten Regel gesucht, und gefunden hatte: und, wäre ich ein Zeitgenosse der alten Griechen gewesen, ich hätte, wie Pythagoras nach gefundenem Beweise für das Quadrat der Hypotenuse den Göttern eine Hekatombe geopfert.

H. C. von Warnsdorf.
„Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung", Schmalkalden 1823, p. 41.

War das Eulersche Verfahren in der Anwendung unbequem und bot es zudem keine genau vorgezeichnete Marschroute, so leidet an diesem letzteren Mangel auch das praktisch

---

schen Rösselsprung angibt, ist dennoch nicht der erste, der einen solchen Rösselsprung konstruiert hat, vielmehr findet sich schon bei dem Inder Nîlakantha (gegen 1600 oder gegen 1700) ein solcher, wie Stenzler in Ergänzung der Forschungen von A. Weber (Berliner Monatsber. 1873, p. 705—735) nachgewiesen hat („Über Nîlakantha's Rösselsprung", Berliner Monatsber. 1874, p. 21—23 nebst Bemerkungen von A. Weber ibid. p. 23—26).

1) Auf eine andere Zweiteiligkeit von Springerwanderungen über das Schachbrett sei im Vorbeigehen hier hingewiesen: Gegeben seien 2 Springer, die auf irgend zwei Feldern P und Q des Schachbretts aufgestellt sind; jeder von beiden soll von seinem Feld aus eine zusammenhängende Wanderung über je 31 Felder durchmachen, so daß jedes Feld des Brettes im ganzen gerade einmal berührt wird. Das Problem wurde in der „Educational Times" von B. Hanumanta Rau gestellt und ebendort (Educ. Times Reprints (2) VIII, 1905, p. 66—68) von T. Dennis für alle möglichen Kombinationen von P und Q gelöst außer für den Fall, daß P und Q zwei Felder sind, die ein und dasselbe Eckfeld rösseln; in diesem Falle gibt es offenbar keine Lösung, da keine Möglichkeit bestände, das betreffende Eckfeld zu durchwandern. In allen übrigen Fällen ist das Problem aber lösbar und zwar besteht jede Lösung natürlich aus zwei getrennten Rösselketten von je 32 Feldern. Der einfachste Fall ist offenbar der, daß P und Q sich rösseln: irgendein geschlossener vollständiger Rösselsprung mit P und Q als Nachbarfeldern gibt dann die Lösung sofort.

allerdings brauchbarere Verfahren, das wir jetzt ungeachtet der chronologischen Reihenfolge hier anschließen wollen und das von H. C. v. Warnsdorf, einem kurfürstlich hessischen Obergerichtsdirektor in Fulda, herrührt.

Dieses Verfahren besteht in der Beobachtung folgender 2 Regeln[1]):

1. *Bei jedem Zug setzt man den Springer auf das Feld, von welchem unter den zur Wahl stehenden am wenigsten Springerzüge nach anderen, noch unbesetzten Feldern möglich sind.*

2. *Ergeben sich so mehrere Felder mit gleichen Minimalzahlen, so ist die Wahl unter ihnen beliebig.*

Die erste Regel ist, wie sich nicht leugnen läßt, zunächst sehr plausibel. Denn die Wahrscheinlichkeit, ein Feld nochmals zu erreichen, ist um so größer, je größer die Zahl seiner Ausgänge ist; man wird daher in der Regel die Felder zuerst nehmen, die nur noch wenige freie Ausgänge besitzen, da man sie sonst eventuell gar nicht wieder erreichen würde. Hat eins der in Frage kommenden Felder gar nur noch einen freien Ausgang, so muß man es wählen, wofern es nicht Schlußfeld werden darf; so muß man in dem Beispiel der Fig. 2 von Feld 6 zu 7 gehen, da man sonst 7, das nur noch den Ausgang nach 8 besitzt, nicht wieder passieren würde und es also höchstens noch Schlußfeld werden könnte.

Hat somit die erste Regel zunächst sehr viel Einleuchtendes, so darf man sich nicht wundern, wenn einzelne sie nicht nur als eine praktisch brauchbare Richtschnur angesehen, sondern ihr sogar eine innere mathematische Wahrheit zugesprochen und einen mathematischen Beweis für sie gesucht haben. „Ein so einfacher Satz muß sich wahrscheinlich auch einfach beweisen lassen", schreibt der Astronom H. C. Schumacher an Gauß (22. August 1839)[2]). Warnsdorf selbst

1) Siehe die bereits oben (am Anfange dieses Paragraphen) zitierte Schrift, p. 21, wo die beiden, aus praktischen Gründen hier getrennten Regeln vereinigt sind.

2) „Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher", Bd. III, Altona 1861, p. 249. Vgl. a. Max Lange, „Lehrbuch des Schach-

gab sogar einen, wie er meinte, „bündigen Beweis“[1]) für die „unumstößlich“ richtige Regel, jedoch ist dieser Beweis, wenn auch Schumachers Urteil „Gewäsch“[2]) über ihn wohl zu hart ist, jedenfalls weit davon entfernt, streng resp. „bündig“ zu sein. Ein Beweis ist schon deshalb nicht möglich, weil *die Regel überhaupt nicht richtig ist*, „richtig“ weder in dem Sinne, daß man nur bei Befolgung der Regel zu einem Rösselsprung käme, noch „richtig“ in dem Sinne, daß man bei Beobachtung der Regel stets zu einem Rösselsprunge kommen müßte, wobei selbstverständlich nur von den Brettformen die Rede sein soll, auf denen an sich Rösselsprünge möglich sind.

Bevor wir jedoch auf eine Kritik der Regel Warnsdorfs uns näher einlassen, wollen wir ihre praktische Anwendbarkeit an einem speziellen Falle zeigen und wählen hierfür dasjenige Brett, für das allein nach Jaenisch[3]) die Regel streng richtig ist, d. h. für das sie alle überhaupt auf ihm möglichen Rösselsprünge liefert, das Rechteck von 3×4 Feldern: Beginnt man zunächst in einer Ecke, etwa 1 (Fig. 11), so muß man von da der Regel nach zu 2 springen, da dieses Feld nur noch einen Ausgang (nach 3) hat, während das sonst noch in Frage kommende Feld 6 zwei Ausgänge (nach 5 und 7) hat. Auch der Übergang von Feld 4 zu 5 ist obligatorisch, da das außerdem in Frage stehende Feld 9 zwei freie Ausgänge statt des einen von 5 hat. Erst beim Verlassen von 7 tritt Wahlfreiheit zwischen 8 und 12, die beide je einen Ausgang noch haben,

spiels“, 1856, p. 195. — Die Regel selbst erkannte Schumacher in demselben Brief als „die einfachste und eleganteste, die man sich denken kann“, an; s. a. einen Brief desselben (ohne Datum, aus den vierziger Jahren des 19. Jahrh.) an den Schachtheoretiker von der Lasa, Schachzeitung der Berliner Schachgesellschaft, 6. Jahrg., 1851, p. 409. Gegen die in diesem letzten Brief enthaltene beiläufige Bemerkung Schumachers, Warnsdorf habe seine Regel „durch Zufall“ gefunden, verwahrte sich dieser übrigens in der Schachzeitung, 13. Jahrg., 1858, p. 491.

1) Warnsdorf, l. c. p. 41; den Beweis selbst s. p. 21/22.

2) Brief an Gauß, l. c.

3) Jaenisch, „Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs“, t. II, 1862, p. 284.

ein. Wählt man 8, so erhält man den Rösselsprung der Figur 11, im anderen Falle den folgenden:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 11, 10, 9, 8 (s. Diagramm in Fig. 12).

Aus Fig. 11 ergibt sich offenbar noch ein zweiter Rösselsprung durch Spiegelung an einer der Mittelachsen, und aus

1	8	3
4	11	6
7	2	9
10	5	12

Fig. 11.

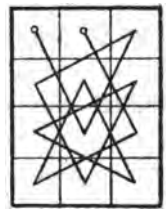


Fig. 12.

10	1	8
7	4	11
2	9	6
5	12	3

Fig. 13.

dem Rösselsprung der Fig. 12 ergeben sich offenbar noch 3 andere durch Spiegelungen an der Horizontal- und Vertikalachse. Außerdem liefert die Methode Warnsdorfs noch den Rösselsprung Fig. 13 und ein Spiegelbild dazu. — Weitere Rösselsprünge als diese 3 wesentlich verschiedenen (Figg. 11, 12, 13) resp. — unter Einrechnung aller Spiegelbilder — diese 8, von denen jeder natürlich in zweierlei Richtung durchlaufen werden kann, liefert die Warnsdorfsche Methode nicht, wie man sich leicht überzeugt. Zwar besteht, wenn man in Fig. 13 bis Feld 7 gekommen ist, wieder Wahlfreiheit zwischen 8 und 12, wie vorher im Falle Fig. 11; die Fortsetzung mit Feld 12 statt 8 würde jedoch nur ein Spiegelbild des Rösselsprungs der Fig. 12 — mit der umgekehrten Durchlaufungsrichtung wie bei diesem — ergeben. Mit anderen Anfangsfeldern als den betrachteten ergeben sich ferner auch keine vollständigen Rösselsprünge. — Man überzeugt sich nun aber auch leicht, daß es in unserem Falle weitere Rösselsprünge als die 3 resp. 8, welche die Warnsdorfsche Methode liefert, überhaupt nicht gibt[1]).

1) Die 3 Rösselsprünge finden sich bereits bei Euler, l. c. p. 336 (§ 42).

Im grunde genommen ist schon der Rösselsprung Moivres (Fig. 2, S. 322) nach dem Prinzip der Warnsdorfschen Methode gebildet; denn von den ersten 50 Feldern gehören nur 2 dem inneren Quadrat der 16 Felder an, während die übrigen 48 die 48 Felder der beiden äußeren Banden sind. Es werden also offenbar hierbei, wenn auch vielleicht nicht bei jedem einzelnen Zuge, was wir hier nicht nachprüfen wollen, so doch im ganzen die Felder der wenigsten freien Ausgänge zuerst besetzt, wie es gerade Warnsdorf fordert. Denken wir uns nun diesen Rösselsprung in entgegengesetzter Richtung, von 64 zu 1, durchlaufen, so erhalten wir offenbar einen, der in ziemlich schroffem Widerspruch zu der Regel Warnsdorfs steht.[1]) Schon hieraus erhellt, daß Warnsdorfs Bezeichnung seiner Lösung als der „allgemeinsten" (s. den Titel der Schrift) keineswegs berechtigt und mindestens irreführend ist. Tatsächlich gibt es — außer für das Brett von 3×4 Feldern, wie schon oben gesagt, — im allgemeinen zahlreiche andere Rösselsprünge neben den Warnsdorfschen, die also nur eine Klasse unter allen bilden, und zwar nicht einmal eine besonders interessante Klasse, da die durch Symmetrie und sonstige merkwürdige Eigenschaften ausgezeichneten Rösselsprünge in der Regel nicht dazu gehören.

Die Forderungen Warnsdorfs sind so weit davon entfernt, notwendige Bedingungen darzustellen, daß man nach Jaenischs[2]) Versuchen beispielsweise über die ersten 40 Züge hinaus den Rösselsprung (auf dem gewöhnlichen Schachbrett) beliebig, gegen die Regel Warnsdorfs, formieren kann und dann, wofern man nur für die Fortsetzung die Regel beobachtet, im allgemeinen immer noch zum Ziel kommt. Der Grund hierfür liegt offenbar einmal in der ungeheuer großen Zahl der überhaupt möglichen Rösselsprünge, zum anderen aber darin, daß die Warnsdorfsche Regel im allgemeinen auf Bretter

1) Daß die erste Regel Warnsdorfs nicht umkehrbar sei, d. h. daß nicht jeder Rösselsprung der Minimumsforderung genüge, bemerkt schon Schumacher in dem mehrfach zitierten Brief an Gauß.

2) Jaenisch, l. c., t. II, p. 59.

beliebiger Form sich wird anwenden lassen, und bei einem Brett mit — sagen wir 40 — besetzten Feldern das Gebiet der 24 noch unbesetzten Felder als das besondere Brett, auf das nun die Regel anzuwenden ist, angesehen werden muß, wobei es allerdings in jedem Einzelfalle fraglich ist, ob auf diesem Teilbrett der unbesetzten Felder überhaupt ein Rösselsprung existiert.

Die Forderung Warnsdorfs ist aber nun nicht nur nicht notwendig, sondern sie ist auch nicht hinreichend, d. h. auch bei Beobachtung der Regel kommt man nicht immer zu einem Rösselsprung, auch wenn es einen solchen an sich gibt. Jaenisch gibt als Beispiel neben anderen für das gewöhnliche Schachbrett den Versuch nebenstehender Fig. 14 an[1]), bei dem trotz bisheriger Befolgung der Regel eine Durchführung des Rösselsprungs bis zum Ende nicht möglich ist; die Felder, die wahlfrei neben anderen gewählt sind, sind dabei durch Unterstreichung der Zahlen markiert.[2]) Das Beispiel zeigt also, daß auch die vollständige, von Anfang an durchgeführte Beobachtung der Warnsdorfschen Regel mit Sicherheit jedenfalls nicht zum Ziele führt. Dies hat nun den sehr wesentlichen Nachteil, daß, wenn man bei Anwendung der Regel auf irgendeinem Brett nicht zum Ziele

36	9	12	40	54	19	14	17
11	50	35	38	13	16	45	20
8	37	10	53	48	55	18	15
51	34	39			44	21	46
30	7	52	1	56	47		43
33	4	31	40	59		25	22
6	29	2	57	24	27	42	
3	32	5	28	41	58	23	26

Fig. 14.

1) Jaenisch, l. c. p. 278. — Auch C. Wenzelides erprobte die Regel, und zwar dadurch, daß er von vornherein gewisse Partien des Diagramms festlegte und nun nach den Warnsdorfschen Regeln die Vervollständigung versuchte, fand hier jedoch Fälle, in denen die Regeln versagten, z. B. einmal bei 4 zu Anfang festgelegten Ketten von je 5 Zügen; Schachzeitung IV, 1849, p. 54; vgl. auch von demselben: Schachzeitung V, 1850, p. 212.

2) Bei Jaenisch fehlt hier die Markierung bei den Feldern 11, 53, 56.

kommt, man nicht wissen kann, ob dies daran liegt, daß in der Tat für diese Brettform kein Rösselsprung existiert, oder nur daran, daß die Methode Warnsdorfs versagt. Diesen Übelstand hatte nun freilich Warnsdorf selbst bereits erkannt[1]) und auch ein Beispiel hierfür angegeben, und zwar für ein rechteckiges Brett von 4×7 Feldern. Er empfiehlt für solche Fälle, in denen sich die Fortsetzung als unmöglich erweist, alle diejenigen Felder, die wahlfrei ausgewählt waren, zu markieren und nun das letzte dieser sukzessive zu ersetzen durch die anderen, die neben ihm zur Wahl standen, und so mit diesen der Reihe nach die Fortsetzung zu versuchen. Mißlingt auch dieser Versuch, so wird das vorletzte wahlfreie Feld entsprechend ersetzt usw.

Aus solchen Gründen sah sich Warnsdorf auch bereits zu der Einschränkung veranlaßt, daß seine Regel unbedingt nur gelte für rechteckige Bretter von $p \times q$ Feldern, wo p und q, d. h. die Anzahlen der Felder jeder Zeile resp. Kolonne, beide ≥ 6 und $p \cdot q$ gerade sei.[2]) Nach den Versuchen von Jaenisch bewährt sich die Regel aber für ungerades $p \cdot q$, sofern nur p und q beide > 5 sind, im ganzen recht gut.[3]) Es würde jedoch hier zu weit führen und hieße auch die Bedeutung der Warnsdorfschen Regel überschätzen, wollten wir eingehende Betrachtungen über ihren genauen Gültigkeitsbereich anstellen. Sie entbehrt ohne Zweifel nicht des Interesses; sie wird auch in den weitaus meisten Fällen, wenn man nicht geradezu den Vorsatz hat, sich festzurennen, zu einem Rösselsprung führen[4]), und es wird für jede Brettform und für jedes Anfangsfeld, für die es überhaupt Rösselsprünge gibt, auch solche geben, die wenigstens der ersten Regel Warnsdorfs, der Minimumsbedingung, entsprechen.[5]) — Warnsdorf selbst

1) Warnsdorf, l. c. p. 23; das Beispiel s. p. 50 (Figg. 41—43).

2) Siehe v. Warnsdorf, „Zur Theorie des Rösselsprungs", Schachzeitung 13, 1858, p. 492.

3) Jaenisch, l. c. p. 279. Ebenso ein ungenannter Kritiker Warnsdorfs in Müllners „Literaturblatt", Nr. 40, 18. Mai 1824, p. 159.

4) Jaenisch, l. c. p. 278/279.

5) Siehe Jaenisch, l. c. p. 288, auf dessen eingehendere Untersuchungen hier überhaupt verwiesen sei.

überschätzte den Wert seiner Methode freilich ganz außerordentlich, wenn er meinte, das Rösselsprungproblem sei damit geradezu erledigt. Eingedenk des Goethe-Wortes: „Alles, was geendigt, was abgetan da liegt, kann unsere Aufmerksamkeit keineswegs fesseln“[1]), stand er, wie er selbst erzählt, an, ob er überhaupt seine Methode veröffentlichen dürfe, da für jeden, der seine Lösung gelesen und verstanden habe, notwendig alles Interesse an dem Problem verloren gehen müsse.[2]) Wenn auch nicht Goethe selbst, so war es doch einer der dii minorum gentium des deutschen Parnasses, Adolf Müllner, der Warnsdorf über diese Bedenken „beruhigte“.[3])

Nachtragen müssen wir übrigens noch, daß die Vorschrift Warnsdorfs in der oben angegebenen Form nur für den Fall bestimmt ist, daß für das betreffende Brett und das angegebene Anfangsfeld nur irgendein Rösselsprung gefordert, über das Schlußfeld also nichts vorgeschrieben wird. Ist als solches jedoch ein bestimmtes Feld vorgeschrieben oder soll der Rösselsprung geschlossen sein, so erfordern die Regeln noch folgende Zusätze[4]): *Ein etwa vorgeschriebenes Schlußfeld erhält sofort die Bezeichnung 64 und gilt als besetzt. Befindet sich unter mehreren gleicherweise zur Wahl stehenden Feldern eins, welches das Feld 64 oder — bei Forderung eines geschlossenen Rösselsprungs — das Feld 1 rösselt, so bleibt es noch reserviert, und ein anderes wird zunächst besetzt. Wird 64 (resp. 1 bei Forderung eines geschlossenen Rösselsprungs) nur noch von einem Feld gerösselt, so schreibt man in dieses 63 (resp. 64) usw.*,

1) Goethe, „Wilhelm Meisters Lehrjahre“, 2. Buch, 1. Kapitel.

2) Vgl. auch das an den Kopf dieses Paragraphen von uns gesetzte Wort.

3) (Hallische) Allgemeine Literatur-Zeitung vom Jahre 1825, 2. Bd., Nr. 183, col. 625—632; Nr. 184, col. 633—639, sowie in redaktionellen Fußnoten und einer Nachschrift zu der in Anm. 3 der vorigen Seite zitierten Rezension des „Literaturblatts“, Nr. 41, 21. Mai 1824.

4) Siehe v. Warnsdorf, „Zur Theorie des Rösselsprungs“, Schachzeitung XIII, 1858, p. 489—492. Vgl. a. von der Lasa, „Lösung des Rösselsprungs“, Schachzeitung, herausg. von der Berliner Schachgesellschaft, I, 1846, p. 188—191.

mit anderen Worten: man konstruiert den Rösselsprung gewissermaßen von beiden Enden aus. C. Wenzelides[1]) rät ferner, vorsichtshalber die von den Eckfeldern ausgehenden je 2 Züge sofort zu ziehen, um nicht von den Eckfeldern ausgeschlossen zu werden.

§ 6. Zur Morphologie des Rösselsprungs.

Der Kunst, Rösselsprünge von besonderen Eigenschaften oder von dem Auge besonders gefälligen Formen zu bilden, haben Liebhaber oft große Mühe und Sorgfalt gewidmet. So ist im Laufe der Jahrzehnte ein ganzes Museum von z. T. recht kunstvollen Rösselsprüngen entstanden, die uns, soweit sie mathematisches Interesse besitzen, z. T. noch weiterhin beschäftigen werden. Soweit jedoch das Interesse vorwiegend ästhetischer Natur ist, kann es nicht unsere Aufgabe sein, auf das reiche, in in der Literatur zerstreute Material[2]) näher einzugehen. Es sei jedoch gestattet, hier umstehend einige Proben[3]) von Rösselsprüngen, die sich vorwiegend nur durch ansprechende oder eigenartige Formen auszeichnen, zu geben (Figuren 15—22). Dabei beschränken wir uns hier nur auf den Regelfall, das gewöhnliche

---

1) Schachzeitung IV, 1849, p. 48.

2) Eine Sammlung solcher Materialien war von E. Lequesne (s. von ihm: „Quelques mots sur le problème du cavalier", La nouvelle Régence, III, 1862, p. 162—164, sowie besonders die Notiz ebda. p. 218) bezweckt, ist anscheinend aber nicht erfolgt oder wenigstens nicht veröffentlicht.

3) Ich entnehme von diesen, zu denen man übrigens auch weiter unsere Figuren 8, 25, 45, 46 vergleichen wolle, die Figuren 15—19 dem Werke von A. Cretaine, „Études sur le problème de la marche du cavalier" ...., 1865, Figuren 21 und 22 einem Werk von Edward Falkener (s. lit. Index, Jahr: 1892), dem sie jedoch vermutlich nicht zu eigen gehören, und Fig. 20 der Kollektion, die der als Konstrukteur von Rösselsprüngen offenbar recht geschickte Graf Arnold Pongracz in der Wiener Schachzeitung I, 1855 gab (s. lit. Index). Auch von den hier oben sonst wiedergegebenen Rösselsprüngen finden sich mehrere in ähnlichen Formen bereits unter diesen Pongraczschen, sowie übrigens auch unter den kunstvollen Rösselsprüngen des im liter. Index aufgeführten Werkes von

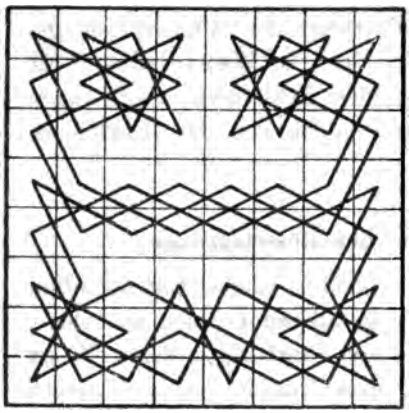


Fig. 15.

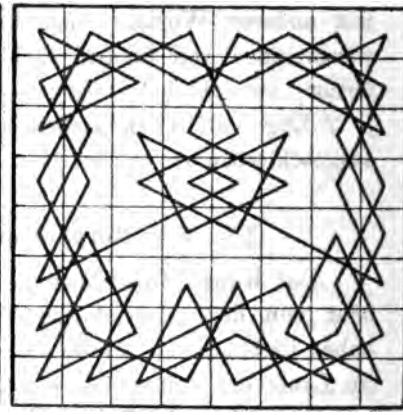


Fig. 16.

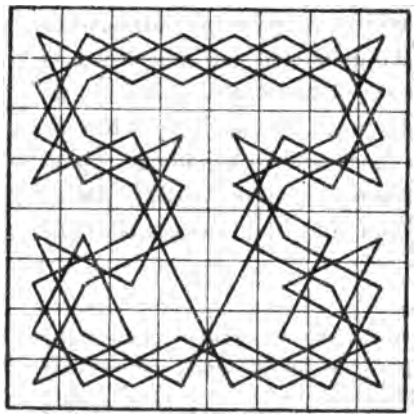


Fig. 17.

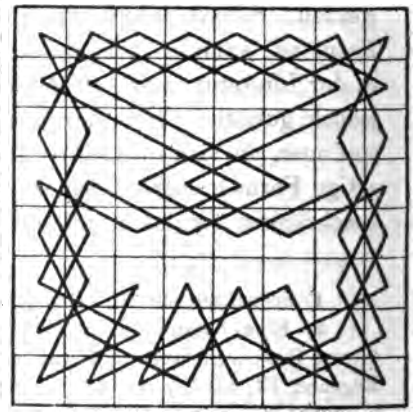


Fig. 18.

Schachbrett, werden aber im nächsten Paragraphen auch für eine andere Brettform noch einige solcher Beispiele geben.

Victor Käfer (1842). Rösselsprünge der zweiten Pongraczschen Tafel weisen übrigens die Initialen des Namens ihres Verfassers auf. Solche Rösselsprünge, in denen besondere Buchstabenzeichen auftreten, finden sich u. a. bei Solvyns und Lauber (s. liter. Index, Jahr: 1856 resp. 1877); s. a. die Nachbildungen nach Solvyns in der kleinen Ausgabe unseres Buches: „Mathem. Spiele", 1907, p. 87/88; s. a. die Schrift von Haldeman (liter. Index: 1864), p. 60.

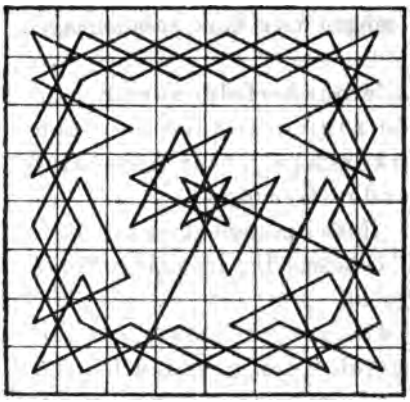


Fig. 19.

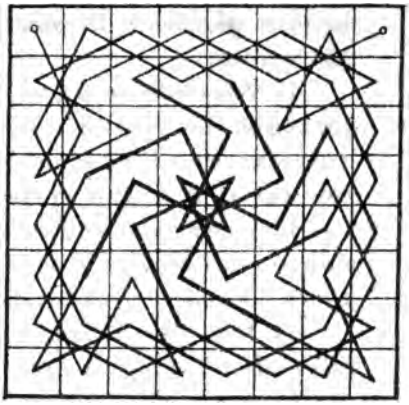


Fig. 20.

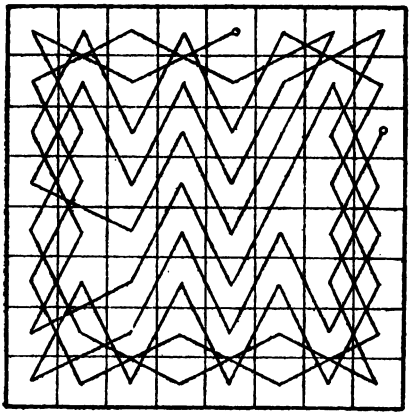


Fig. 21.

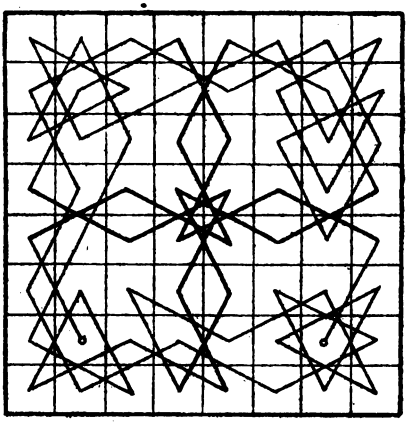


Fig. 22.

Der vor wenigen Jahren verstorbene französische Divisions-General Théodore Parmentier ließ eine (nicht in den Buchhandel gelangte) Spezialveröffentlichung über den Rösselsprung erscheinen, in der gleichfalls eine Reihe interessanter Diagramme von Rösselsprüngen abgebildet ist, in der aber auch verschiedene allgemeinere morphologische Fragen, den Rösselsprung betreffend, erörtert sind.[1]) Die wichtigsten dieser Fragen mit

1) Siehe die Schrift nach dem liter. Index: Nr. 497 (l. c. p. 11—13).

den dort gegebenen Resultaten mögen hier kurz zusammengefaßt werden:

1) Wieviele, aus zwei aufeinanderfolgenden Springerzügen bestehende gerade Linien können in einem Rösselsprung höchstens vorkommen, unter Ausschluß von aus je 3 Zügen bestehenden Geraden?

In einem geschlossenenen Rösselsprunge brachte Parmentier bei seinen Versuchen höchstens 10, in einem offenen jedoch 12 solcher gerader Linien an.

2) Dieselbe Frage für die aus je 3 aufeinanderfolgenden Springerzügen bestehenden geraden Linien.

In einem geschlossenen Rösselsprung hat Parmentier 6, in einem offenen 9 solcher Geraden angebracht.

3) Die überhaupt auf einem Brett möglichen Springerzüge sind offenbar von viererlei Richtung (s. Fig. 3, S. 325). Ist es möglich, daß in einem Rösselsprung die eine Richtung ganz ausfällt?

Nein. Die 4 Eckfelder haben nur je zwei Ausgänge, und zwar sind unter den im ganzen 8 Kommunikationslinien der 4 Eckfelder alle 4 Richtungen vertreten, jede zweimal und zwar immer an zwei gegenüberliegenden Ecken. Soll also die eine Richtung ganz ausfallen, so müßte schon der Rösselsprung offen und zwei gegenüberliegende Eckfelder seine Endfelder sein; das ist aber deshalb wieder nicht möglich, weil diese beiden von gleicher Farbe sind. Einen offenen Rösselsprung, in dem die eine der 4 Richtungen nur durch einen Springerzug vertreten ist, hat Parmentier dagegen angegeben.

4) Welches ist die Maximalzahl der Züge einer Richtung, wenn zwei- oder mehrzügige gerade Linien dieser Richtung ausgeschlossen sein sollen?

Fig. 23 zeigt, daß höchstens 28 (in der Figur ausgezogene) Linien (4 Serien von je 7 untereinander liegenden Linien) möglich sind; diese wären nun also unter sich und unter Einziehung der noch freien Punkte (z. B. 25, 28, 59, 64) miteinander zu verbinden, wobei einzelne Linien durch ihre punktiert gezeichneten Verlängerungen ersetzt werden dürften. Die in

die Figur geschriebenen Zahlen geben den Rösselsprung an, der tatsächlich 28 Linien der einen Richtung in sich schließt.

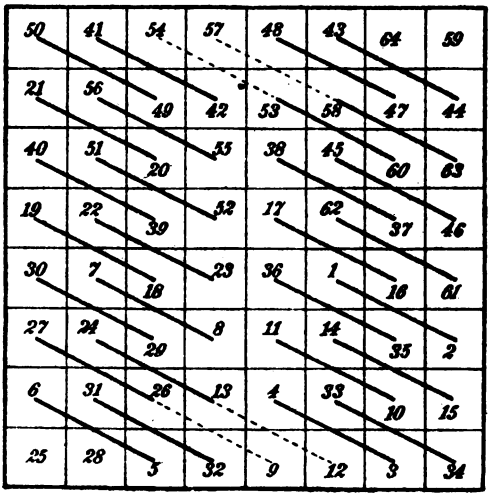


Fig. 23.

Läßt man auch zwei- oder dreizügige gerade Linien der betreffenden Richtung zu und zählt diese für zwei resp. drei Linien, so wären zu den 28 in der Fig. 23 ausgezogenen zunächst die 4 dort punktierten Linien hinzuzuzählen und ferner 10 Linien zwischen den einzelnen Zügen, von 29—4 an bis 42—45. Im ganzen hätten wir also als möglich 42 Züge der gleichen Richtung. Ein Rösselsprung mit dieser Gesamtanzahl wird aber nicht möglich sein, vielmehr gelang Parmentier nur einer mit 36 der 42 Linien als Maximalzahl; es ist derjenige der Fig. 24.

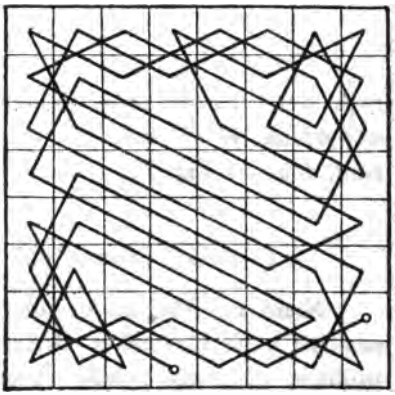


Fig. 24.

5) Können zwei Systeme von je 28 Zügen gleicher Richtung in einem Rösselsprunge vorkommen?

Parmentier erhielt nur einen Rösselsprung mit 28 Zügen des einen und 26 des anderen Systems oder aber einen mit je 27 Zügen der beiden Systeme (s. Näheres dort, p. 13 und die Fig. 24 auf Planche III).

6) Können in einem Rösselsprunge alle 4 Systeme gleichgerichteter Züge gleich oft vorkommen?

Soll dies der Fall sein, so muß der Rösselsprung offenbar geschlossen und jede der 4 Richtungen also durch 16 Züge vertreten sein. Ob ein solcher Rösselsprung möglich ist, steht

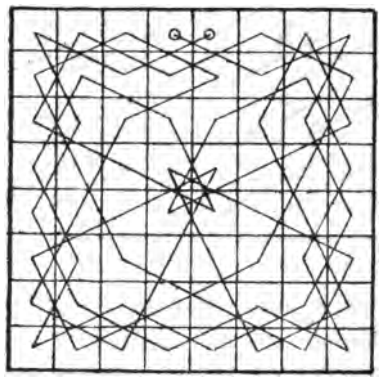


Fig. 25.

nicht fest; Parmentier bildete einen offenen, in dem 3 der 4 Systeme je 16-mal, das vierte dagegen 15-mal vertreten sind, den der Fig. 25.

§ 7. Rösselsprünge auf Brettern anderer Form.

Nicht nur für das gewöhnliche Schachbrett der 64 Felder, sondern auch für andere Bretter hat Euler das Rösselsprungproblem ins Auge gefaßt. Beschränken wir uns zunächst auf quadratische Bretter, so erkennen wir für 4 und 9 Felder sofort die Unmöglichkeit eines Rösselsprungs: im ersteren Falle rösselt kein Feld ein anderes und im zweiten gilt dies für das Mittelfeld.

Aber auch für ein quadratisches Brett von 16 Feldern ist ein Rösselsprung nicht möglich[1]), wie man leicht folgendermaßen erkennt: Unter den 4 Eckfeldern müßten mindestens 2 sein, die keine Endfelder wären, wenn es einen Rösselsprung gäbe. Wir dürfen also ohne Beschränkung annehmen, daß 1 (s. Fig. 26) weder Anfangs- noch Schlußfeld ist. Nun rösselt aber 1 nur die Felder 7 und 10; es müßte also in unserem Rösselsprung der Passus ..7—1—10.. resp. ..10—1—7.. vorkommen. Die Felder 10 und 7 sind zugleich die einzigen, die 16 rösseln; es müßte sich also 16 an 10 oder 7 auf der einen oder anderen Seite anschließen und, da dann kein Feld sich mehr an 16 angliedern kann, müßte dieses notwendig Endfeld sein, also etwa der Passus 16—7—1—10.. vorkommen. Entsprechend erkennt man, daß auch die 4 Felder 6, 13, 11, 4 aufeinander folgen und das andere Ende des Rösselsprungs bilden müssen. Dann ist aber ein Übergang zwischen diesen beiden Enden ausgeschlossen, weil die übrigen 8 Felder in zwei Klassen 2, 8, 15, 9 und 3, 12, 14, 5 zerfallen derart, daß kein Feld der einen eins der anderen rösselt. — Wir werden übrigens auf diese durch die Quadrate und Rhomben der Fig. 27 veranschaulichte Anordnung der 16 Felder zu 4 Gruppen bei späterer Gelegenheit (§ 11, S. 369ff.) zurückkommen.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fig. 26.

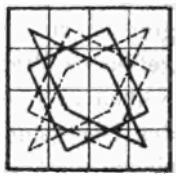


Fig. 27.

Für ein Quadrat von 25 Feldern gibt es dagegen Rösselsprünge, wie Fig. 28 zeigt.[2]) Da jedes der 4 Eckfelder nur je 2 der 4 um das Mittelfeld herumliegenden Felder 2, 4, 22, 24 rösselt, und sich höchstens 3 der Eckfelder zwischen

1) Euler, l. c. p. 332 (§ 35).

2) Euler, l. c. p. 334 (§ 39); vgl. dazu auch hier S. 365 (Anfang von § 10). Dieser Eulersche Rösselsprung weist die Besonderheit auf, daß bei ihm die Nummern von je 2 gegenüberliegenden Feldern sich gerade zu $n^2 + 1 = 26$ ergänzen.

diese vier Felder einschieben können, etwa in der Folge 2—3—4—25—24—23—22, so muß wenigstens eins der 4 Eckfelder notwendig Endfeld sein, also der Rösselsprung in einer der 4 Ecken beginnen oder endigen. Zugleich erkennt man daraus, daß geschlossene Rösselsprünge hier unmöglich sind.

23	18	5	20	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	2	15	20
1	16	21	8	3

Fig. 28.

Dies letztere ergibt sich auch aus einem allgemeineren Gesichtspunkte, insofern als für Bretter ungerader Felderzahl geschlossene Rösselsprünge überhaupt nicht existieren. Erinnern wir uns nämlich der Vandermondeschen Notation für die Felder des Schachbretts (s. § 2, S. 326/7) und bedenken, daß mit jedem Springerzuge die eine der beiden „Koordinaten", wie wir die Zeilen- und die Kolonnenziffer gemeinsam benennen können, sich um 2 und die andere dann um 1 ändert, so sehen wir, daß, wenn für ein bestimmtes Feld die Summe dieser Koordinaten eine gerade Zahl ist, sie für alle dies Feld rösselnden Felder eine ungerade Zahl sein muß und vice versa. Nennen wir nun kurz die Felder, für welche die angegebene Summe gerade ist, „gerade" Felder und die anderen „ungerade", so sieht man, daß ein Springerzug stets von einem geraden zu einem ungeraden oder bei einem in 2 Farben ausgeführten Brett, wie schon in § 2 (S. 326) gesagt: von einem weißen zu einem schwarzen Felde führt resp. umgekehrt. Für den Übergang von einem geraden zu einem geraden, sowie von einem ungeraden zu einem ungeraden Felde ist daher stets eine gerade Anzahl von Springerzügen erforderlich und ebenso insbesondere auch dazu, um von einem Felde zu diesem selbst wieder zurückzukehren. Wenn somit eine geschlossene Kette von Springerzügen stets eine gerade Anzahl solcher Züge umfaßt, so folgt aber, daß ein geschlossener Rösselsprung auf Brettern von ungerader Felderzahl überhaupt niemals existieren kann[1]),

1) Einen anderen Beweis hierfür — unter Benutzung der Wessel-Gauß-Argandschen Darstellung der imaginären Zahlen für die Feldernotation — gibt Fritz Hofmann, „Sur la marche du cavalier", Nouv. annal. de mathém. V, 1886, p. 224—226; wegen dieses schon von Gauß

ohne daß er jedoch andererseits auf solchen von gerader Felderzahl zu existieren braucht.[1]) — Dazu gleich noch eine Bemerkung: Da von 2 Nachbarfeldern derselben Horizontalen oder Vertikalen stets das eine gerade, das andere ungerade ist, so erfordert der Übergang von dem einen zum anderen stets eine ungerade Anzahl von Springerzügen, und es müssen daher in den Lösungen (s. z. B. Figuren 1, 2, 5, 10, 11, 13, 14, 23, 28) stets gerade und ungerade Nummern in den Horizontal-, sowie in den Vertikalreihen abwechseln, während die Nummern einer diagonalgerichteten Reihe offenbar entweder alle gerade oder alle ungerade sein müssen und zwar, je nachdem die betreffende Reihe zur Farbe der geraden oder zu derjenigen der ungeraden Felder gehört.

Für quadratische Bretter von 36, 49, 81 usw. Feldern gibt es Rösselsprünge, worauf wir jedoch an dieser Stelle nicht weiter eingehen wollen.[2])

Auch rechteckige und andersgeformte Bretter zog Euler in den Kreis seiner Betrachtungen; so konstatierte er[3]) für rechteckige Bretter von 3×5 oder 3×6 Feldern die Unmöglichkeit eines Rösselsprungs, für solche von 3×4, 3×7 (resp. $3 \times n$, wo $n \geqq 7$ ist), 4×5, 4×6, 4×7 die Existenz ungeschlossener und die Unmöglichkeit geschlossener[4]) Rösselsprünge und für 5×6 die Existenz geschlossener Rössel-

---

angewandten Notationsprinzips s. übrigens Anm. 3, S 220/221 unseres Buches.

1) Beispiele hierfür s. unten auf dieser Seite nebst Anm. 4.

2) Siehe jedoch § 9 (S. 360ff.) und auch § 12 (S. 375ff.) resp. die dort besprochenen Arbeiten von Moon, Delannoy und Frost. Rösselsprünge für 36, 49, 81 Felder findet man übrigens beispielsweise bei Jenkins, Educ. Times Repr., Question 7623, Bd. 41, 1884, p. 93—96; s. auch an demselben Orte p. 96—98 die Arbeit von Biddle, wo für das Brett von 49 Feldern für 25 verschiedene Anfangsfelder die Möglichkeit eines Rösselsprungs nachgewiesen ist (vgl. dazu hier S. 362, Anm. 1).

3) Euler, l. c. p. 336 (§§ 42, 43). Der Fall 3×4 ist bei uns in § 5, S. 335f. eingehend erörtert.

4) Daß für 4×8 Felder, das halbe Schachbrett, geschlossene Rösselsprünge unmöglich sind, wird in § 15 (S. 389) bewiesen werden.

sprünge. Allgemein stellen sich diese Resultate Eulers resp. die daraus von ihm gefolgerten Annahmen so dar, daß er für ein rechteckiges Brett von $p \cdot q$ Feldern Rösselsprünge als möglich annahm für folgende Fälle:

1. $p \cdot q$ gerade und $\frac{p}{q} \geqq 5$: geschlossene Rösselsprünge;
2. $p = 4$, $q \geqq 5$: ungeschlossene Rösselsprünge;
3. $p = 3$, $q = 4$ oder $\geqq 7$: ungeschlossene Rösselsprünge.

Um auch für andere Brettformen einige Beispiele zu geben, mögen hier zunächst noch die 2 geschlossenen Rösselsprünge der Fig. 29, von Euler herrührend[1]), Platz finden:

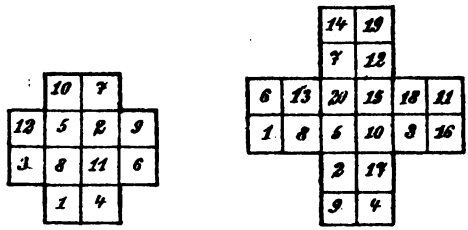


Fig. 29.

Besondere Beachtung verdient sodann wohl noch, weil auch zum praktischen Schachspiel verwandt, das Brett des sogenannten „Vierschach". Wir geben für dieses in den Figuren 30—33 (S. 351—354) eine Anzahl kunstvoller Rösselsprünge.[2])

Auch für noch weitere Brettformen sind Rösselsprünge angegeben, so für ein sechseckiges Brett von dem Göttinger Professor Wildt[3]) (1770—1844). Erwähnt seien auch, da sie in der Literatur viel angeführt werden, die sogenannten „kreisförmigen" Rösselsprünge mit Anordnung der 64 Felder in

1) Euler, l. c. p. 337 (§ 44).

2) Von diesen entnehme ich die der Figuren 30—32 dem bereits S. 341, Anm. 3 zitierten Werke von Falkener (s. a. die Bemerkung dort) und Fig. 33 dem gleichfalls dort zitierten Buche von Lauber (s. bei ihm Fig. 18), das reich an solchen Rösselsprüngen ist.

3) Siehe die betreffende Arbeit im liter. Index, Jahr: 1803. — Joh. Chr. Dan. Wildt war 1797—1811 und 1813—1817 Prof. extr. in Göttingen, später Münzbuchhalter in Hannover.

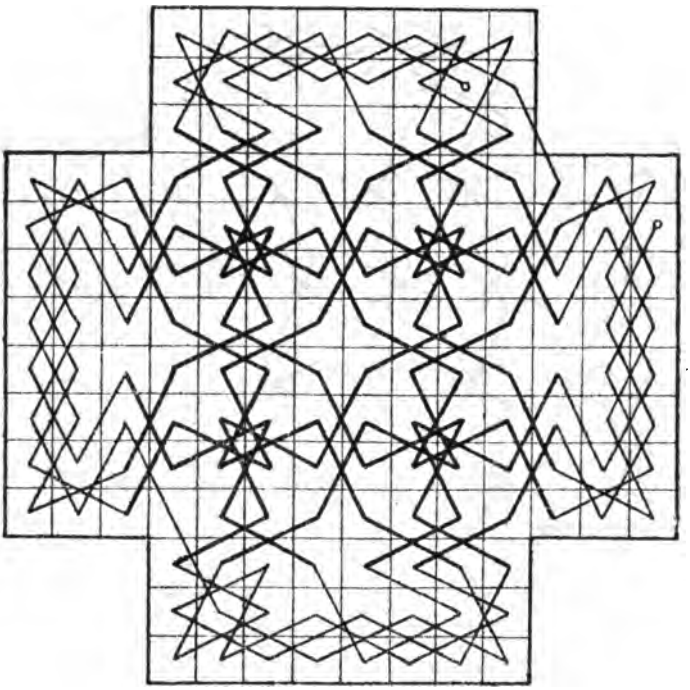


Fig. 30.

8 Oktanten zu je 8 Feldern[1]) oder auch z. B. in 16 Sektoren zu je 4 Feldern[2]), doch ist der wirklichen Natur dieser Rösselsprünge im grunde nicht ein Brett von der Form eines Kreises oder Kreisringes adäquat, sondern vielmehr die Mantelfläche eines Zylinders, da der einzige wesentliche Unterschied gegen die gewöhnlichen Rösselsprünge auf quadratischen oder rechteckigen Brettern darin besteht, daß sich jetzt an die letzte Kolonne die erste zyklisch wieder anschließt, wodurch die Aufgabe des Rösselsprungs übrigens natürlich eine mehr oder weniger wesentliche Erleichterung erfährt.

1) Teod. Ciccolini, „Del cavallo degli scacchi", 1836, T.ª 21.

2) (R. Twiss), „Chess", vol. II, 1789, p. 9 und Figurentafel, gibt nach einem Manuskript unbestimmten Alters des British Museum einen solchen Rösselsprung an; derselbe auch bei W. F. Kenny, „Die Schachgrammatik" ..., Leipzig 1821, p. 127.

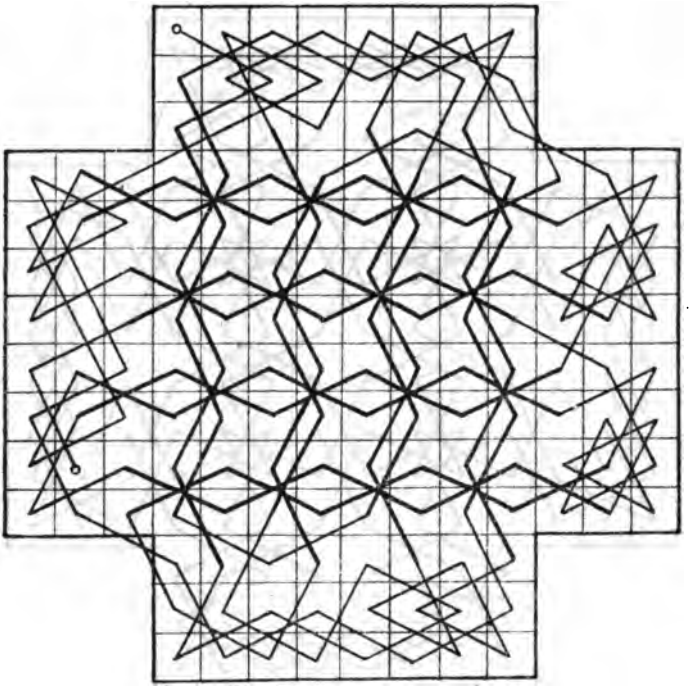


Fig. 31.

§ 8. Methoden von Volpicelli und Minding.

Wenn wir das Verfahren Eulers mehr als ein systematisches Probieren denn als eine Methode ansprechen mußten, so wird man das jetzt zu besprechende Verfahren auch nur so bezeichnen können, jedenfalls aber nicht, wie Paolo Volpicelli (1804—1879), der Begründer desselben, es tat[1]), eine „vollständige Lösung" des Problems darin sehen. Eine Besonderheit dieses — übrigens eigentlich von selbst gegebenen — Verfahrens besteht darin, daß es ein rein algebraisches Ge-

1) Gegen Volpicellis Bezeichnung seines Verfahrens als einer „Solution complète" (s. im literar. Index die Titel seiner Arbeiten aus dem Jahre 1872) wendet sich A. Régnier, Les Mondes XXXII, 1873; vgl. auch Volpicellis Antwort ebenda XXXIII, 1874 (s. beides genauer im liter. Index).

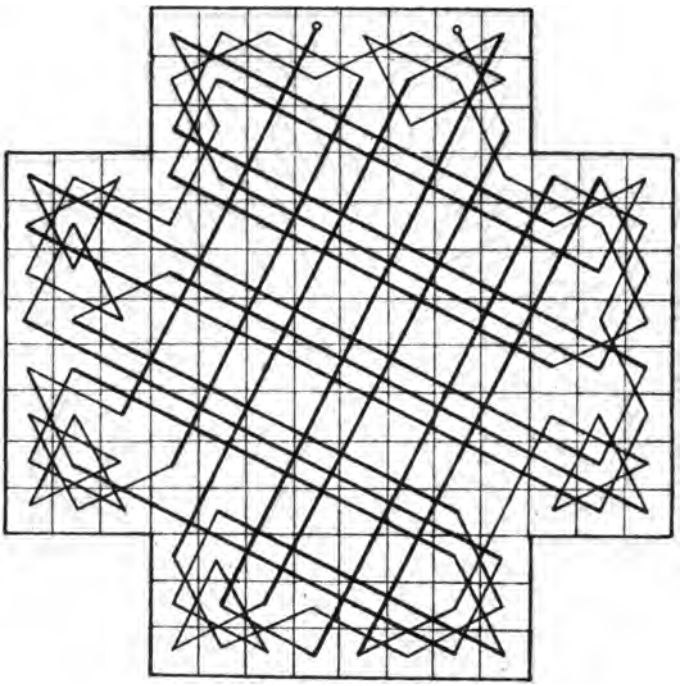


Fig. 32.

wand angenommen hat und daher ohne Benutzung des Brettes angewandt werden kann.

Legen wir Vandermondes Notation zugrunde (s. § 2, S. 326/7), so ergeben sich die Felder x, y, zu denen wir von dem gegebenen Feld x_1, y_1 gelangen können, offenbar, indem man den Wert von x um 1, den von y um 2 ändert resp. umgekehrt, wobei diese Änderungen sowohl Vergrößerungen wie Verkleinerungen sein dürfen, so daß im ganzen, entsprechend den 8 mit einem gegebenen Feld im allgemeinen sich rösselnden Feldern (s. Fig. 3, S. 325), 8 Möglichkeiten vorhanden sind. Volpicelli[1]) sucht nun für alle möglichen Werte von x_1, y_1

1) Volpicelli, „Solution d'un problème de situation relatif au cavalier des échecs", Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris XXXI, 1850, p. 314—318.

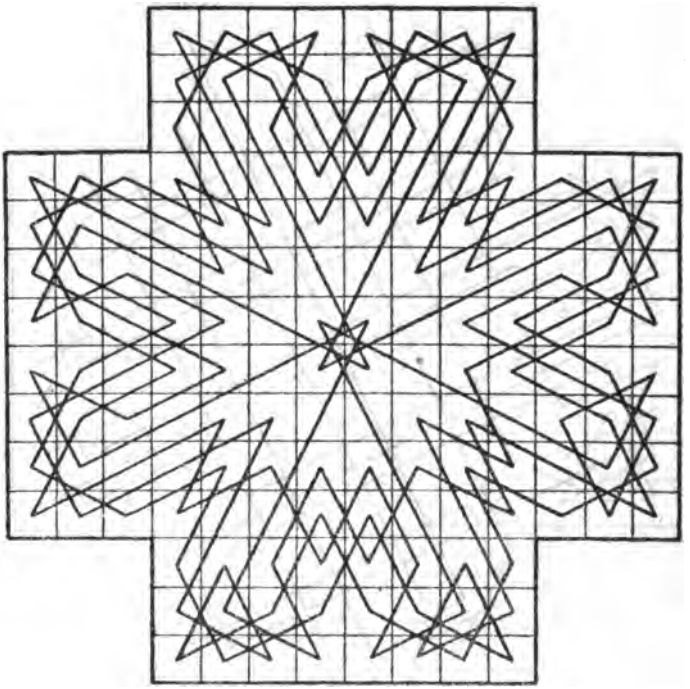


Fig. 33.

diese 8 Wertsysteme auf, merzt dabei natürlich diejenigen Systeme, die, wie z. B. bei negativen Werten, nicht mehr wirkliche Felder des Brettes repräsentieren, aus und stellt die übrigen tabellarisch zusammen, mit anderen Worten: er stellt in einer Tabelle zusammen, mit welchen anderen sich die einzelnen Felder rösseln. So erhält er z. B. für den von uns in § 5 (S. 335f.) behandelten Fall eines Brettes von 3×4 Feldern (3 Kolonnen und 4 Zeilen) folgende Tabelle[1]), in der zu

1) Siehe Volpicelli, „Soluzione completa" usw., 1872, Sonderausgabe, p. 88. — Die entsprechende Tabelle für das gewöhnliche Schachbrett, aber natürlich ohne die ungeheure Zahl aller daraus resultierenden Rösselsprünge hat Volpicelli, Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, t. 74, 1872, p. 1101 gegeben. Eine Reproduktion der Volpicellischen Methode findet man übrigens bei Camillo Tychsen (Titel s. liter. Index), Tidskrift for Mathematik (2) 1, 1865, p. 17—20 und bei

jedem x_1, y_1 in derselben Horizontalen die verschiedenen zugehörigen x, y angegeben sind:

x_1, y_1	x, y	x, y	x, y
1, 1	2, 3	3, 2	—
1, 2	2, 4	3, 3	3, 1
1, 3	2, 1	3, 4	3, 2
1, 4	2, 2	3, 3	—
2, 1	3, 3	1, 3	—
2, 2	3, 4	1, 4	—
2, 3	3, 1	1, 1	—
2, 4	3, 2	1, 2	—
3, 1	2, 3	1, 2	—
3, 2	2, 4	1, 3	1, 1
3, 3	2, 1	1, 4	1, 2
3, 4	2, 2	1, 3	—

Hieraus findet man dann, wenigstens in einem so einfachen Falle wie dem vorliegenden, leicht, jedoch keineswegs schneller als durch Betrachtung der Figur, die verschiedenen Lösungen des Rösselsprungs, deren es hier mit dem Anfangsfeld 2, 4 z. B. folgende vier gibt:

I. 2,4; 1,2; 3,1; 2,3; 1,1; 3,2; 1,3; 3,4; 2,2; 1,4; 3,3; 2,1,
II. 2,4; 1,2; 3,1; 2,3; 1,1; 3,2; 1,3; 2,1; 3,3; 1,4; 2,2; 3,4,
III. 2,4; 3,2; 1,1; 2,3; 3,1; 1,2; 3,3; 1,4; 2,2; 3,4; 1,3; 2,1,
IV. 2,4; 3,2; 1,1; 2,3; 3,1; 1,2; 3,3; 2,1; 1,3; 3,4; 2,2; 1,4.

Von diesen Rösselsprüngen ist I mit dem unserer Fig. 13 (S. 336), IV mit dem von Fig. 12 identisch; II ist ein Spiegelbild von IV, III das von I.

Die Auffindung der zu einem gegebenen Wertepaar x_1, y_1 zugehörigen x, y kam auf die Auflösung der Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= \pm 2 \\ y - y_1 &= \pm 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} x - x_1 &= \pm 1 \\ y - y_1 &= \pm 2 \end{aligned}\right\}$$

hinaus.

H. Tarry, „Solution du problème du cavalier au jeu d'échecs", Les Mondes XXVIII, 1872, p. 60—64.

mit allen nur möglichen Vorzeichenkombinationen hinaus; dieselben bilden in dieser Form oder zusammengefaßt zu

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 5$$

die „Gleichung" des Springers (vgl. Kap. VII, S. 166 nebst Anm. 3 dort).

Ferdinand Minding[1]), der 1885 verstorbene hervorragende Dorpater Mathematiker, ersetzte nun die Auflösung der vorstehenden Gleichungen durch einen anderen Algorithmus; er bezeichnet das Vandermondesche Feld a, b durch $x^a y^b$ und findet alle dieses Feld rösselnden Felder als Terme des Ausdrucks $U \cdot x^a y^b$, wo

$$U = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

ist und wo die nach der Natur der Sache unmöglichen Terme, wie z. B. die mit negativen oder verschwindenden Exponenten, auszumerzen sind. Um dies Verfahren näher auseinanderzusetzen, reproduzieren wir folgende von Minding[2]) behandelte Aufgabe:

„Auf wieviel Arten ist es möglich, auf einem Rechtecke von dreimal vier Feldern in 11 Sprüngen aus dem Eckfeld 1, 1 auf das ihm schräg gegenüberstehende Eckfeld 3, 4 zu gelangen, wenn das Ausgangsfeld 1, 1 gar nicht mehr und das Eckfeld 3, 4 nur erst mit dem 11ten Sprunge besetzt werden darf?"

Das Ausgangsfeld ist hier xy; setzen wir $U \cdot xy = U_1$, $U \cdot U_1 = U_2$, allgemein $U \cdot U_n = U_{n+1}$, so ist

$$U_1 = x^2y^3 + x^3y^2$$
$$U_2 = x^3y + xy^3 + x^2y^4 \text{ (das Glied } xy \text{ wird fortgelassen)}$$
$$U_3 = x^4y + 2x^2y^3 + 2x^3y^2 + x^2y^5 \text{ (das Glied } x^3y^4 \text{ bleibt fort)}$$
$$U_4 = 3x^3y + 3xy^3 + 3x^3y^3 + 4x^2y^4$$
$$U_5 = 6x^3y + 10xy^3 + 7x^4y^2 + 3x^2y^3 + 3xy^4$$
$$U_6 = 13x^3y + 3x^3y^3 + 13xy^3 + 19x^3y^3 + 17x^2y^4.$$

Anstatt nun weiter U_7 usw. zu bilden, fangen wir besser an dem anderen Ende an und denken uns, wir gingen von 3, 4 aus, und gebrauchen hier statt der U die Symbole V; wir erhalten so:

$$V_1 = x^2y^2 + xy^3.$$

---

1) „Über den Umlauf des Springers auf dem Schachbrette (den sogenannten Rösselsprung)", Crelles Journal, Bd. 44, 1852, p. 73—82; abgedr. a. d. Bulletin de la classe phys.-math. de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg, t. VI; in englischer Übersetzung („On the Knight's move at chess") erschienen in Cambr. and Dubl. Math. Journ. VII, 1852, p. 147—156.

2) Crelles Journal, l. c. p. 76.

Da U_1 durch die Substitution von $x^{4-\alpha}$ für x^α und von $y^{5-\beta}$ für y^β in V_1 übergeht und offenbar wegen der völlig äquivalenten Lage der beiden Endfelder einem in dem einen Falle brauchbaren Felde auch stets in dem anderen ein solches entspricht, so können wir durch die gleiche Substitution V_5 aus U_5 herleiten und erhalten:

$$V_5 = 3x^3y + 3x^2y^2 + 7xy^3 + 10x^3y^3 + 6x^2y^4.$$

In 6 Sprüngen kommt man also auf 13 Arten von 1, 1 zu 3, 1 und in 5 Sprüngen auf 3 Arten von 3, 1 zu 3, 4, also auf $13 \cdot 3 = 39$ Arten in 11 Sprüngen von 1, 1 zu 3, 4, wenn das 6te Feld gerade 3, 1 ist; im ganzen kommt man so in 11 Sprüngen von 1, 1 zu 3, 4 auf

$$13 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 13 \cdot 7 + 19 \cdot 10 + 17 \cdot 6 = 431 \text{ Arten.}$$

Dabei brauchen aber die in den 11 Sprüngen berührten Felder natürlich nicht alle verschieden zu sein; wir hätten sonst in dem obigen Algorithmus ein bereits in U_i vorgekommenes Feld in den U mit höherem Index unterdrücken müssen, wie wir dies mit den Endfeldern dem Wortlaut der Aufgabe gemäß ja auch getan haben. Unter den 431 Ketten befinden sich aber natürlich alle vollständigen Rösselsprünge, die mit diesen beiden Endfeldern möglich sind. Wie man sich leicht überzeugt, gibt es jedoch nur einen solchen: es ist das Spiegelbild des uns bereits aus Fig. 11 (S. 336) bekannten. — Ein diesem Mindingschen ähnliches Abzählverfahren, herrührend von C. Flye Sainte-Marie, werden wir in § 15 (S. 389 f.) kennen lernen.

§ 9. Methode Collinis.

Betrachten wir den in Fig. 2 (S. 322) dargestellten Rösselsprung Moivres, so fällt uns als charakteristisch sofort eine gewisse Zweiteiligkeit des Diagramms: ein innerer Teil einerseits und ein sich um diesen herumlegender Rand andererseits, auf, und in der Tat haben wir den Rösselsprung Moivres anzusprechen als einen Vorläufer zu dem jetzt zu besprechenden, bei dem die *Einteilung des Brettes in ein inneres Gebiet, nämlich das innere Quadrat der 16 Felder, und ein Randgebiet von 48 Feldern* systematisch durchgeführt wird. Das Verfahren rührt her von dem Florentiner Collini[1]), der Direktor

1) „Solution du problème du cavalier, au jeu des echecs. Par Mr. C." Mannheim 1773 (bezüglich der Autorschaft Collinis s. den liter. Index, sowie die Schrift Warnsdorfs von 1823, p. 65). — Vgl. hierzu auch einen Artikel von der Lasas, Schachzeitung II, 1847, p. 97—103.

des naturhistorischen Kabinetts zu Mannheim und vorher lange Zeit Privatsekretär Voltaires war.

Die Felder jedes der beiden Teile, des „grand Échiquier“ wie des „petit Échiquier“, teilte Collini wieder in vier Klassen, so zwar, daß sich die Felder derselben Klasse stets hintereinander mit dem Springer durchlaufen lassen. In Fig. 34 ist diese Einteilung veranschaulicht, indem die Felder derselben Klasse durch denselben Buchstaben bezeichnet und für einige Klassen die betreffenden Ketten von Springerzügen angegeben sind. Wir haben so 8 Ketten von

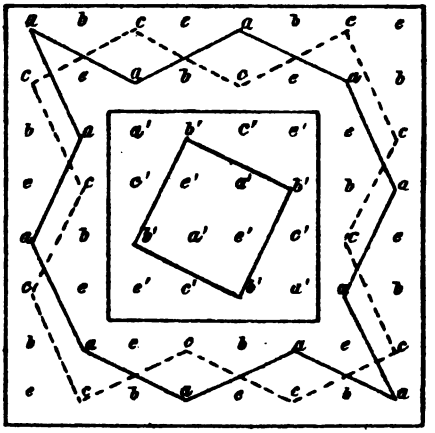


Fig. 34.

Springerzügen, 4 innere von je 4 Feldern (wir nennen sie kurz: a', b', c', e') und 4 äußere (a, b, c, e) von je 12 Feldern. Die vier äußeren oder großen Ketten treten bereits in dem Rösselsprung Moivres als zusammenhängende Ketten auf und auch die vier inneren oder kleinen, die uns übrigens schon oben (in Fig. 27, S. 347) entgegengetreten waren, kommen in der Literatur des Rösselsprungs als wichtige naturgemäße Elemente dieses begreiflicherweise schon ziemlich früh vor. Von den inneren Ketten bilden die mit Vokalen bezeichneten die Figur eines Rhombus, die mit Konsonanten bezeichneten die eines Quadrats. Von den äußeren enthalten nur die „Vokalketten“,

wie wir kurz sagen wollen, Eckfelder und springen fortwährend von einem äußeren zu einem inneren Felde des „grand Échiquier“ über und umgekehrt, enthalten also je 6 äußere und 6 innere Felder, während die „Konsonantenketten“ an den Ecken von einem äußeren Feld wieder zu einem äußeren Feld überspringen, also je 8 äußere und 4 innere Felder enthalten (der „grand Échiquier“ hat im ganzen 28 äußere und 20 innere Felder).

Collinis Methode besteht nun darin, die 8 Ketten aneinanderzureihen in der Weise, daß immer eine innere Kette mit einer äußeren abwechselt, wobei alle Folgen zulässig sind außer denen von gleichen Buchstaben, also außer *aa′*, *bb′*, *cc′*, *ee′*, zwischen welchen Ketten eben ein Übergang nicht möglich ist. So erhält man z. B. einen brauchbaren Rösselsprung aus dem Schema *ae′* || *cb′* || *ea′* || *bc′*, nämlich den in Fig. 35 angegebenen.[1])

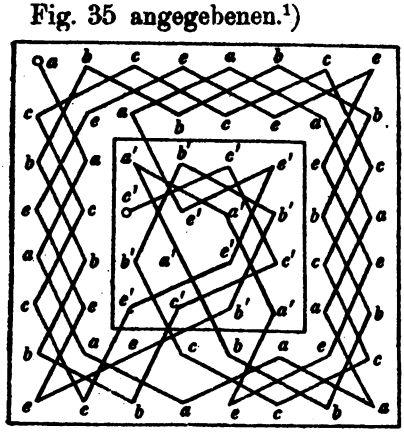


Fig. 35.

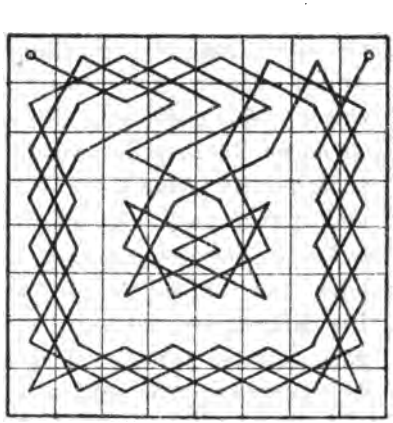


Fig. 36.

Es brauchen jedoch nicht immer äußere und innere Ketten abzuwechseln, vielmehr können auch zwei äußere aneinandergereiht werden, nur nicht eine äußere Vokalkette (*a*) an die andere (*e*) und ebensowenig eine äußere Konsonantenkette an die andere, und gleiches gilt auch für die inneren Ketten. So gibt z. B. das Schema *a b c′ e′ c a′ b′ e* den Rösselsprung der Fig. 36.

1) Collini, l c. p. 25.

Collini hat seine Methode auch auf den Fall anzuwenden gesucht, daß nicht nur irgendein Rösselsprung verlangt ist, sondern eins der Endfelder oder auch beide vorgeschrieben sind.[1]) Die Methode ist jedoch insbesondere für diese letzte Form des Problems wenig geeignet und hinter der großen Ausführlichkeit und Weitschweifigkeit dieses Teils der Collinischen Schrift verbirgt sich auch wohl nur die Erkenntnis von der Unzulänglichkeit des Gebotenen.

Eine Ausdehnung der Collinischen Methode auf andere quadratische Bretter findet man bei Moon[2]), der übrigens von der Arbeit Collinis keine Kenntnis gehabt zu haben scheint. Ein Brett von 12^2 Feldern teilt Moon in 3 Gebiete, von denen die beiden inneren gerade die obigen Teile des gewöhnlichen Schachbretts sind, umgeben jetzt noch von einem äußeren Randgebiet von 80 Feldern, dem dritten Gebiet. Die Felder jedes dieser 3 Gebiete, die wir hier als das „innere", „mittlere" und „äußere" unterscheiden wollen, lassen sich wieder zu je 4 Ketten von Springerzügen zusammenfassen. Die Aneinanderreihung dieser Ketten zu einem Rösselsprung geschieht dann in der Weise, daß man zunächst etwa eine Kette des äußeren, dann eine des mittleren und darauf zwei des inneren, eine des mittleren, zwei des äußeren, eine des mittleren, zwei des inneren, eine des mittleren und schließlich die letzte des äußeren Gebietes nimmt. Die Ketten des mittleren Gebietes als des ständigen Durchgangsgebietes zwischen dem inneren und äußeren würden vor den anderen verbraucht sein, würde man von den letzteren nicht — außer an den Enden des Rösselsprungs — stets je zwei Ketten zusammennehmen; solche Verbindungen von zwei Ketten desselben Gebiets sind ja, wie wir bereits oben sahen, mit gewissen dort schon angegebenen Ausnahmen, auch sehr wohl möglich.

1) Vgl. auch einen Artikel des Abbé Durand in: La nouvelle Régence II, 1861, p. 119—120, 152—156.

2) „On the knight's move at chess" Cambridge Math. J. III, 1843, p. 233—236.

Die geschilderte Methode ist, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, stets anwendbar, wenn n, die Anzahl der Felder einer Reihe, durch 4 teilbar, also „gerad-gerade“ ist.

Für $n = 6$ teilt Moon das Brett in 2 Teile, von denen der eine die 4 inneren Felder, der andere den Rest umfaßt; die Felder des äußeren Randgebiets werden wieder zu 4 Ketten vereinigt, und es entsteht ein Rösselsprung, indem man an je eine dieser 4 Ketten immer eins der 4 inneren Felder anschließt. Auch diese Methode besitzt allgemeineren Wert, nämlich für alle Fälle, in denen n, durch 4 geteilt, den Rest 2

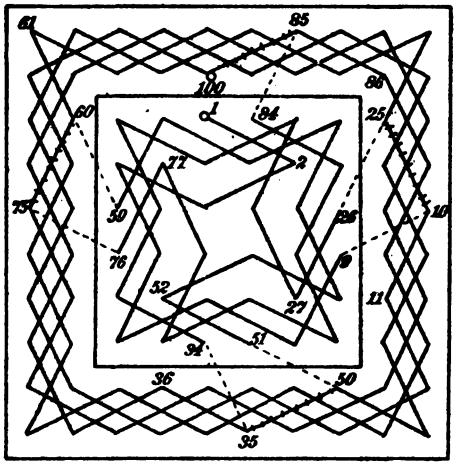


Fig. 37.

gibt, also „ungerad-gerade“ ist. Um diese Verallgemeinerung nach denselben Prinzipien wie oben durchführen zu können, betrachten wir als inneres Gebiet allerdings am besten nicht das Quadrat der 4 Felder, zwischen denen Springerzüge ja nicht möglich sind, sondern das Quadrat der 36 Felder, das sich in 4 ungeschlossene Ketten, jede bestehend aus je einem inneren und 8 Randfeldern, zerlegen läßt. Zwischen diesen Ketten sind dann Übergänge möglich, und die weiteren Ränder schließen sich hieran an wie oben. Fig. 37 gibt einen 100-feldrigen Rösselsprung nach Moon.

Der Fall eines ungeraden n, für den Moon seine Methode nur kurz skiziert, ist von H. Delannoy eingehend studiert worden.[1]) Für $n = 5$ teilt man das Brett in zwei Teile, das Mittelfeld und den Rand. Letzterer läßt sich in 2 Ketten durchlaufen, die in Fig. 38 durch die punktierten und ausgezogenen Linien unterschieden sind. Von der punktierten Kette ist ein Übergang sowohl zu dem Mittelfeld wie zu der ausgezogenen Kette möglich, und wir erhalten daher einen Rösselsprung, wenn wir, etwa von dem Mittelfeld ausgehend, zu dem durch 2 bezeichneten Felde springen, darauf alle Felder der punktierten Kette durchlaufen, von dem letzten (17 in Fig. 38) zu dem Feld 18 der ausgezogenen Kette springen und dann diese durchlaufen, um in der Ecke oben links zu endigen. — Umgeben wir nun die

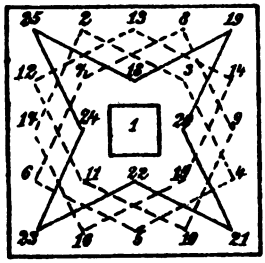


Fig. 38.

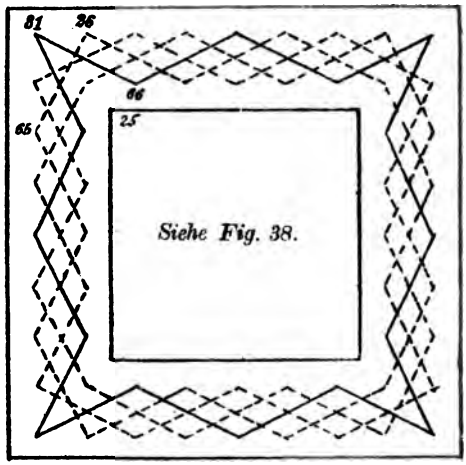


Fig. 39.

1) Siehe Frolow, „Les carrés magiques", Paris 1886 oder Lucas, „L'arithmétique amusante", p. 254 ff. Für $n = 7$ und 9 finden sich übrigens Rösselsprünge nach Collinischer Methode vorher bei Biddle, Educat. Times Repr. 1884, Bd. 41, p. 96—98.

obige Figur wieder mit einem Rand von der Breite zweier Felder, also gehen wir zu $n = 9$ über, so können wir dieses Randgebiet wieder in 2 Ketten, eine punktierte und eine ausgezogene, zerlegen (s. Fig. 39). Wir durchlaufen, um einen Rösselsprung zu erhalten, die inneren 25 Felder wie zuvor, gehen von dem Schlußfeld 25 in der Ecke oben links zu dem Feld 26 der punktierten Kette des äußeren Gebiets über, durchlaufen diese Kette bis 65 und gehen von hier zu dem Feld 66 der ausgezogenen Kette über, deren Felder dann durchlaufen werden. Wir endigen dabei wieder in der Ecke oben links, so daß wir von hier aus wieder auf ein neues Randgebiet übergehen können und unsere Methode daher als eine allgemeine für den Fall, daß n, durch 4 geteilt, den Rest 1 gibt, betrachten dürfen.

Für $n = 7$ verbinden wir wieder die Felder des äußeren Randes zu 2 Ketten, einer punktierten und einer ausgezogenen (s. Fig. 40), die sich jedoch nicht, wie in dem vorstehenden Falle, aneinanderreihen lassen. Von den inneren 9 Feldern lassen wir das Mittelfeld isoliert und verbinden die anderen 8 zu einer ungeschlossenen Kette; ein Rösselsprung ergibt sich leicht, indem wir von dem Eckfeld 1 über 2 zum Mittelfeld 3 springen, von da zu 4 und dann die punktierte Kette durchlaufen bis 33, von hier zu 34 auf das innere Quadrat und über die Kette dieses zu 41, von da auf die ausgezogene Kette des äußeren Gebiets zu 42 springen und dann schließlich diese durchlaufen bis 49. — Umgeben wir diese Figur wieder mit einem Rand (s. Fig. 41), so lassen sich die Felder desselben wieder zu 2 Ketten vereinigen, die mit dem Rösselsprung der 49 Felder so verknüpft werden können, daß die eine der neuen Ketten, die ausgezogene, bei 1 beginnend

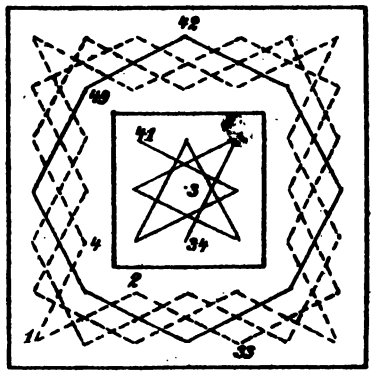


Fig. 40.

und bei 16 endigend, zuerst durchlaufen wird, danach zu dem inneren Feld (1) gesprungen und nun der Rösselsprung der 49 inneren Felder wie in Fig. 40 durchwandert wird, sodann an das Schlußfeld (49) dieses das Feld 66 angeknüpft und von da aus die punktierte Kette bis schließlich zu 121 durchlaufen wird. Die Endfelder dieses Rösselsprungs haben wieder — wenn auch mit Vertauschung von Anfang und Ende — entsprechende Lage wie zuvor, und unsere Methode gilt daher offenbar allgemein für alle Fälle, in denen n, geteilt durch 4, den Rest 3 läßt.

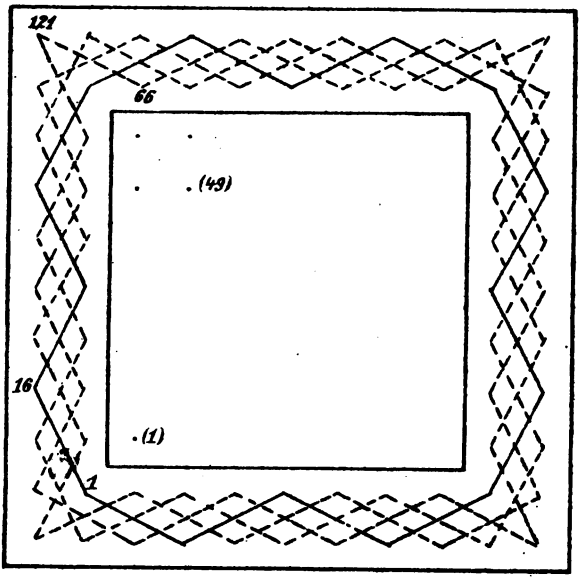


Fig. 41.

Damit ist aber die Collinische Methode allgemein durchgeführt; denn wir haben Lösungen gegeben für die Fälle, in denen $n \geqq 5$ bei Division durch 4 die Reste 0, 1, 2, 3 läßt, d. h. für alle Werte von $n \geqq 5$.

§ 10. Methode Vandermondes.

Für ein Brett von 100 Feldern konstruierte Euler einen Rösselsprung[1]), indem er 4 Rösselsprünge von je 25 Feldern aneinanderreihte. Auf das gewöhnliche Schachbrett ist dies Verfahren natürlich nicht anwendbar, da für ein Brett von 16 Feldern bekanntlich kein Rösselsprung existiert (s. S. 347). Immerhin erwies sich auch hier eine Vierteilung des Bretts, wie ja aus Gründen der Symmetrie zu erwarten stand, als ein fruchtbares Prinzip. Auf diesem beruht eine von dem Pariser Akademiker Vandermonde[2]) herrührende Methode, die wir jetzt besprechen wollen: Zunächst denken wir uns das gewöhnliche Schachbrett in 4 Quadranten geteilt und die 16 Felder in jedem der 4 so mit den Ziffern 1—16 bezeichnet, daß die bei Drehung des Bretts um 180° und ebenso die bei den Spiegelungen an einer der beiden Mittelachsen ineinander übergehenden Felder gleiche Bezeichnungen tragen (s. Fig. 42), und wollen dann in einer Ecke anfangen und nun in 16 Sprüngen zu der gegenüberliegenden Ecke gehen, so zwar, daß die in diesen Sprüngen berührten Felder alle von verschiedener Ziffer sind. Eine solche Kette ist z. B. die in Fig. 43 in ausgezogenen Linien angegebene, deren Feldern durch Fig. 42 die Ziffern 1, 7, 9, 2, 8, 15, 16, 11, 13, 6, 4, 12, 14, 5, 3, 10 zugeordnet sind. Da jede der 16 Ziffern in dieser Kette nur einmal vorkommt, also diejenigen Felder, in welche die bisher

1	2	3	4	4	3	2	1
5	6	7	8	8	7	6	5
9	10	11	12	12	11	10	9
13	14	15	16	16	15	14	13
13	14	15	16	16	15	14	13
9	10	11	12	12	11	10	9
5	6	7	8	8	7	6	5
1	2	3	4	4	3	2	1

Fig. 42.

1) Euler, l. c. p 335 (§ 41).

2) „Remarques sur les problèmes de situation", Histoire de l'académie royale des sciences de Paris 1771, p. 566—574.

passierten bei Drehung des Bretts um 180° oder bei einer Spiegelung übergehen, noch unausgefüllt sind, so erhält man zunächst durch Drehung um 180° aus dieser Kette eine neue von 16 noch unausgefüllten Feldern (siehe in Fig. 43 die gestrichelten Linien), die mit der ersten die Endfelder gemein hat, also mit ihr zusammen eine geschlossene Kette von 32 Feldern bildet. Es sind so zweimal 16 Felder ausgefüllt, von denen die einen 16 bei Drehung des Bretts um 180° die Plätze der anderen einnehmen, während dagegen die 32 Felder, auf deren Plätze die bis jetzt besetzten 32 (der Fig. 43) bei einer Spiegelung kommen würden, gerade die noch freien sind. Wir erhalten also durch eine Spiegelung eine zweite geschlossene Kette aus den noch unausgefüllten 32 Feldern, und es handelt sich jetzt nur noch darum, diese beiden Ketten zu einer zu vereinigen. Dies geschieht nun leicht nach folgendem Prinzip: Veranschaulichen wir uns die beiden geschlossenen Ketten von je 32 Feldern durch 2 Kreise mit je 32 Punkten auf der Peripherie (s. Fig. 44), so

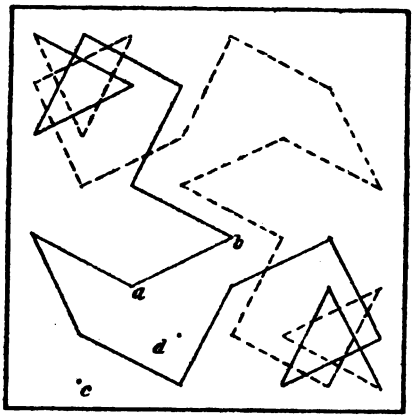


Fig. 43.

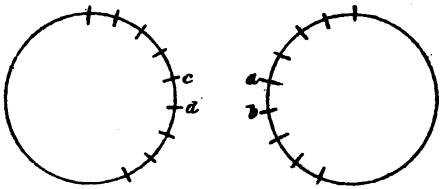


Fig. 44.

suchen wir 2 benachbarte Punkte a, b des einen und 2 benachbarte c, d des anderen so, daß ein Übergang von a zu c und von d zu b möglich ist, d. h. im Sinne unseres Problems

gesprochen: daß a und c sich rösseln und ebenso b und d; alsdann können wir alle 64 Punkte hintereinander durchlaufen, indem wir von a zu c gehen, dann den linken Kreis durchlaufen bis d, von hier zu b und nun über die Punkte des rechten Kreises zu a zurück gehen. 2 Paare solcher Felder finden wir aber leicht; wir haben ein Beispiel in Fig. 43 durch die Buchstaben a, b, c, d angegeben; von den Linien $a - b$ und $c - d$ gehört die eine der einen Kette der 32 Felder, die andere der anderen Kette an, und die Felder rösseln sich paarweise. Heben wir also die Linien $a - b$ und $c - d$ auf und ersetzen sie durch $b - d$ und $a - c$, so entsteht schließlich der Rösselsprung[1]) der Fig. 45. — Wir geben in Fig. 46 noch

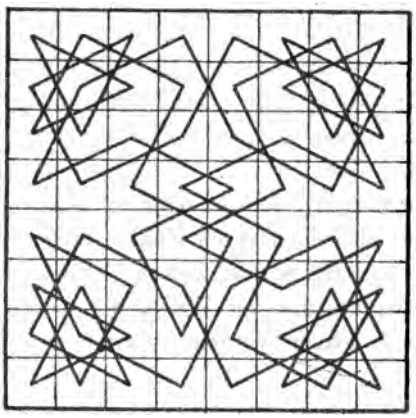


Fig. 45.

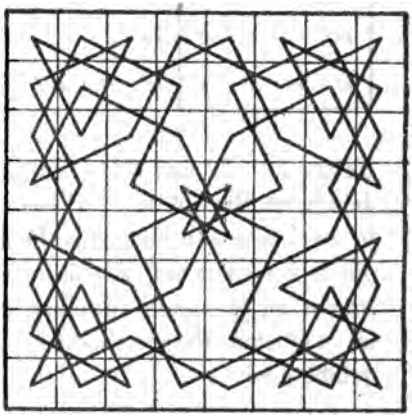


Fig. 46.

ein zweites Beispiel[2]) eines nach dieser Methode gebildeten Rösselsprungs, doch ist hier die Symmetrie ein klein wenig mehr gestört als in Fig. 45, indem zum Zweck der Verbindung der beiden Ketten drei Linien — statt zwei — aufgehoben und durch drei neue ersetzt sind.[3])

---

1) Fig. 5 der Vandermondeschen Figurentafel.

2) Entnommen der schon zitierten Schrift von A Cretaine, Planche C, Figur 6.

3) Die 3 aufgehobenen Linien sind in Vandermondescher Feldernotation (s. S. 326/327) die folgenden:

Es mag noch ein Rösselsprung[1]) angegeben werden, der u. a. eine gewisse Verwandtschaft zu den Vandermondeschen resp. Eulerschen zeigt: Fig. 47. Diesen ist er verwandt, insofern die Kette 1—16 bei Drehung des Brettes um 180° übergeht in 17—32 und ebenso die Kette 33—48 in 49—64. Dies hat zur Folge, daß die Differenz der Zahlen von je zwei einander diametral gegenüberliegenden Feldern, z. B. von 19 und 3, stets 16 ist. Ferner hat dieser Rösselsprung die Besonderheit, daß die Kette 1—16 ausschließlich der unteren Bretthälfte angehört und ebenso die Kette 33—48, die Ketten 17—32 und 49—64 alsdann aber natürlich ausschließlich der oberen Bretthälfte.[2]) Ferner weisen in jedem der 4 Quadranten je zwei gegenüberliegende Felder zwischen ihren Zahlen stets die Differenz 2 auf, was darin seinen Grund hat, daß die Felder immer zu je vieren in einer ganz bestimmten Weise, die wir im nächsten Paragraphen kennen lernen werden, zusammengefaßt sind.

18	57	28	53	24	61	30	51
27	54	19	60	29	52	23	62
58	17	56	25	64	21	50	31
55	26	59	20	49	32	63	22
6	47	16	33	4	43	10	39
15	34	5	48	9	40	1	42
46	7	36	13	44	3	38	11
35	14	45	8	37	12	41	2

Fig. 47.

---

1) 53—72,
2) 32—74,
3) 51—63

und die 3 dafür eingetretenen:

1) 53—74,
2) 32—63,
3) 51—72.

1) Dieser stammt von einem Anonymus F. P. H. her und wurde veröffentlicht in Peter Pratts „Studies of chess", 6. ed., 1825, p. 535

2) Vgl. a. den verwandten, von demselben Autor herrührenden, streng „zweiteiligen" Rösselsprung ebendort p. 534, dessen erstes Viertel freilich sich schon in der zweiten Hälfte des halben Rösselsprungs des Gianutio von 1597 (vgl. Anm. 1, S. 328) findet.

§ 11. Die Quadrupelmethode.

In dem soeben, in Fig. 47, betrachteten Rösselsprunge sind immer je 4 Felder so zusammengefaßt, daß die Figur eines (auf einer Seite offenen) Rhombus (1—2—3—4) oder aber eines Quadrats (9—10—11—12) entsteht und auch bereits vorher (s. Fig. 27, S. 347) war uns eine solche Zusammenfassung der Felder zu „Quadrupeln", wie wir sagen wollen, begegnet. Hierauf beruht die in diesem Paragraphen zu besprechende Methode der Rösselsprungbildung; von wem diese Methode zuerst angegeben ist, habe ich nicht feststellen können. Als die frühesten, mir bekannten Vorkommnisse für die Methode in voller Ausbildung nenne ich zunächst einen Rösselsprung, den der Dichter Adolf Müllner als von einem ungenannten „geometrischen Rösselritter" stammend in seinem „Literatur-Blatt" im Jahre 1824 (Nr. 41, 21. Mai, p. 163) veröffentlichte; sodann ist zu nennen das soeben (Anm. 1 der vorigen Seite) zitierte Werk von Pratt, das außer den von uns dort bereits wiedergegebenen resp. zitierten quadrupelförmigen Rösselsprüngen auch einen enthält, der streng nach der „Quadrupelmethode" in deren vervollkommneter Form, wie wir sie hier zum Schluß darstellen werden, gebildet ist. Übrigens ist die Methode wahrscheinlich noch älter; denn bereits Warnsdorf gibt in seiner Schrift von 1823, ohne den Urheber nennen zu können (s. p. 67), die Quadrupelzuordnung der Felder in seiner Fig. 95 etwa in der Weise, wie wir sie umstehend in Fig. 48 darstellen, an, und partielle Anwendungen der Quadrupelmethode finden sich bereits in jahrhundertealten Rösselsprüngen, so zuerst wohl und in beachtenswerter Weise in dem halben Rösselsprung des Gianutio von 1597 und zwar vorwiegend in dessen zweiter Hälfte (vgl. Anm. 2 der vorigen Seite). Von späteren Schriften behandeln unsere Methode resp. verfahren nach ihr die von Schinnern[1]) (1826), Ciccolini (1836), Zucker-

1) Cl. Rud. v. Schinnern, „Ein Dutzend mathematischer Betrachtungen", Wien 1826, p. 16—29. — Siehe über die betreffenden Arbeiten der oben weiter genannten Autoren die näheren Angaben, sofern sie hier

mandel[1]) (1838), Lavernède[2]) (1838/39), Roget[3]) (1840), Clausen[4]) (1853), G. Mann (1859), de Chambure (1861), Camille de Polignac (1861 und 1881), Mercklein (1864) und Laquière[5]) (1879/80). Ob und inwieweit diese voneinander abhängen, ist nicht zu entscheiden, da in keiner von ihnen die vorhergehenden Arbeiten erwähnt werden.

A	B	C	E	a	b	c	e
C	E	A	B	c	e	a	b
B	A	E	C	b	a	e	c
E	C	B	A	e	c	b	a
a'	b'	c'	e'	A'	B'	C'	E'
c'	e'	a'	b'	C'	E'	A'	B'
b'	a'	e'	c'	B'	A'	E'	C'
e'	c'	b'	a'	E'	C'	B'	A'

Fig. 48.

Die Einteilung der 64 Felder in 16 Quadrupel gibt Fig. 48, in der wir die bei Parallelverschiebung der Quadranten koinzidierenden Quadrupel durch gleiche Buchstaben (klein oder groß, gestrichelt oder

---

fehlen, im literar. Index unter den angegebenen Jahren. Auch in einer von mir nicht eingesehenen Schrift von Mauvillon (1827, s. lite . Index) scheint sich ein Quadrupelrösselsprung zu finden; s. Haldeman. „Tours of a Chess Knight. Prodromus: Bibliography", 1864, p. 25; s. a. den ersten Teil der Haldemanschen Schrift, p. 3.

1) Christoph Wilhelm Zuckermandel, „Regeln nach denen alle Zauberquadrate . . . gebildet werden können . . . Nebst einer Anweisung, den Rösselsprung . . . zu erlernen", p. 63 ff.

2) J. E. Thomas de Lavernède, „Problème de situation", Mémoires de l'Académie du Gard, 1838/39 (1840), p. 151—179.

3) P. M. Roget, „Description of a Method of moving the Knight" . . ., Philos. Magazine (3) 16, 1840, p. 305—309. An Roget nimmt Anlehnung die Arbeit von Durand in der „Régence" 1856, p. 366 ff.

4) Auch E. Troupenas gab in Palamède (2) II, 1842, p. 273—276 die ihm von einem gewissen Anderson mitgeteilte Methode, in einer von ihm selbst verbesserten Form, an.

5) E. M. Laquière, „Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier", Bul. de la soc. mathém. de France 8, 1879/80, p. 82—102, 132—158; auch in einer besonderen Schrift mit dem Haupttitel „Géométrie de l'échiquier" (Paris 1880) wieder abgedruckt. Unsere Zitate beziehen sich auf diesen Abdruck.

ungestrichelt) bezeichnen, wobei nach Roget[1]) die Buchstaben so gewählt sind, daß von einem durch einen Vokal (Konsonanten) bezeichneten Quadrupel zu den Feldern des durch den anderen Vokal (Konsonanten) bezeichneten ein Übergang unmöglich ist, während die Übergänge von einem „Vokalquadrupel" zu einem „Konsonantenquadrupel" oder umgekehrt stets möglich sind.

Durch diese Einteilung in Quadrupel erreicht man, daß man nur noch die Verknüpfung von 16 Elementen, eben der 16 Quadrupel, zu bewerkstelligen hat oder richtiger nur die von 8, da man ja den Rösselsprung aus 2 symmetrischen Hälften zusammensetzen kann. So liefert z. B. das Schema *e′E′cCA′aBb* die erste Hälfte eines symmetrischen Rösselsprungs, bei dem in der Vandermondeschen Feldernotation (s. S. 326/7) die Eintrittsfelder und Ausgangsfelder der einzelnen Quadrupel sind: 2,3—4,4; 6,3—8,4; 6,5—5,7; 3,8—4,6; 5,4—7,3; 8,5—6,6; 4,7—3,5; 5,6—6,8. Die zweite Hälfte beginnt dann in dem zu 2,3 in bezug auf das Zentrum symmetrisch gelegenen Feld 6,6 und verläuft ganz symmetrisch der ersten, indem in dem Schema die ungestrichenen Buchstaben durch die gestrichenen und umgekehrt ersetzt werden.

Man kann aber auch alle 4 Quadrupel desselben Buchstabens aneinanderreihen, wie schon in dem Rösselsprung von 1824 aus dem Müllnerschen „Literatur-Blatt" geschehen ist, dessen Verlauf — s. Fig. 49 — sich in der Schreibweise der Fig. 48 so darstellt: *A′aAa′B′bBb′EeE′e′CcC′c′*.

11	26	51	36	7	24	55	38
50	35	10	25	54	37	6	23
27	12	33	52	21	8	39	56
34	49	28	0	40	53	22	5
13	32	61	48	3	20	57	42
64	47	16	29	60	41	4	19
31	14	45	62	17	2	43	58
46	63	30	15	44	59	18	1

Fig. 49.

In zusammenfassender Wiederholung der obigen Bemerkungen dürfen wir sagen: ein Übergang von einem Vokalquadrupel

1) Roget, l. c. p. 307.

(Figur des Rhombus) zu einem Quadrupel des anderen Vokals ist nicht möglich, wohl aber ein Übergang zu anderen Quadrupeln desselben Vokals, und das Entsprechende gilt für die Konsonantenquadrupel (Figur des Quadrats). Wir können so die 4 Quadrupel A, a, A', a' nicht nur, wie in Fig. 49, zu einem offenen, sondern auch zu einem geschlossenen zusammenhängenden Zuge, wie Fig. 50 zeigt, zusammenfassen, indem wir in geeigneter Weise in allen 4 Rhomben je eine Seite fortnehmen und durch einen Verbindungs-Springerzug ersetzen, wobei die fortgenommenen Seiten einander parallel sind. Dabei können für die fortzunehmende Seite offenbar in jedem

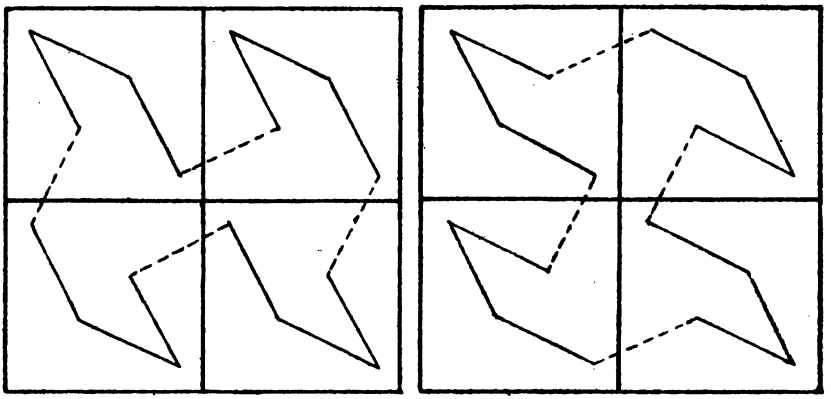


Fig. 50.

Rhombus nur 2 in Betracht kommen, nämlich die nach den anliegenden Quadranten zu liegenden, und man erhält so die 4 Quadrupel A auf 2 Arten zu einer „Kette" vereinigt, wie eben Fig. 50 dies angibt. Von den 2 Ketten, die sich aus je 4 zusammengehörigen Quadrupeln bilden lassen, führt die eine nun bei Umlaufung im Uhrzeigersinne in jedem Quadranten zuerst auf ein weißes, die andere auf ein schwarzes Feld. Hiernach erhalten wir eine naturgemäße Scheidung der Ketten in zwei „Klassen" und bezeichnen die der ersteren als Ketten A, E, B, C je nach den Quadrupeln, aus denen sie zusammengesetzt sind, und die der letzteren entsprechend als A_1, E_1, B_1, C_1. Bei dieser schon von Roget angebahnten und insbesondere

von Laquière weiter ausgebauten Auffassung haben wir es in jedem Rösselsprung nur noch mit 4 statt 64 Elementen zu tun, eben 4 Ketten von je 16 Feldern. Eine Verbindung derselben muß so erfolgen, daß man von einer „Vokalkette“ zu

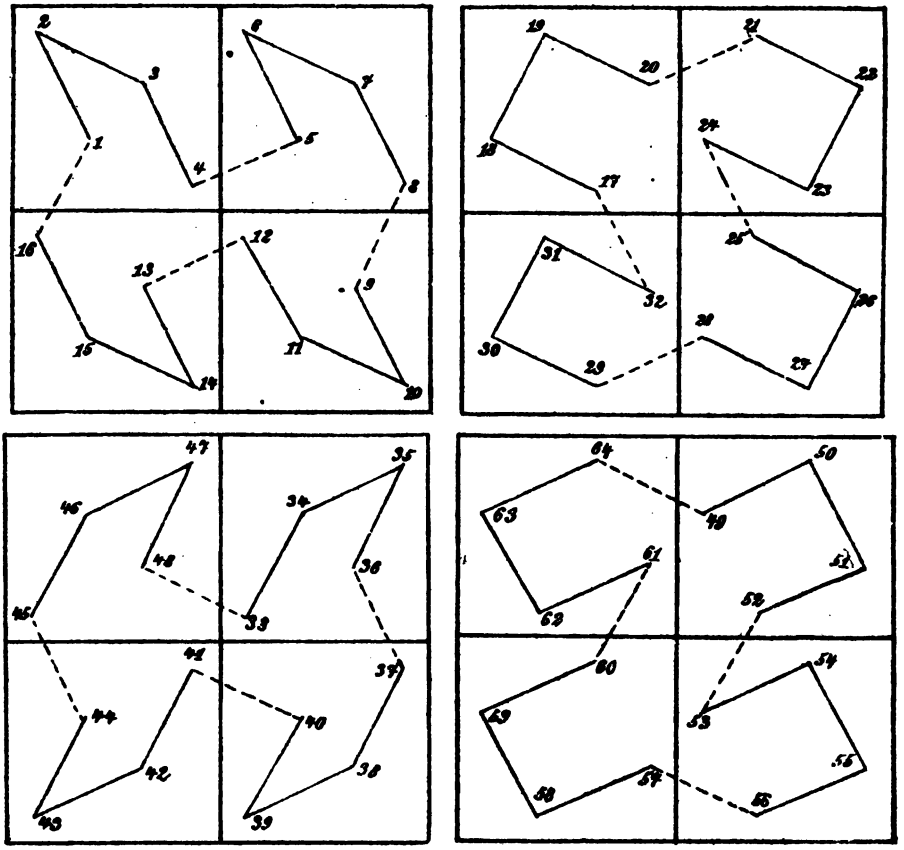


Fig. 51.

einer „Konsonantenkette“ übergeht, also in dem Zyklus *ABEC*. Statt dieser Ketten können jedoch auch beliebig die der anderen Klasse eintreten, nur müssen die Ketten verschiedener Klasse in verschiedener Richtung durchlaufen werden. So lie-

fert z. B. A_1BEC_1 auch einen Rösselsprung. Wir erhalten so im ganzen offenbar 16 und zwar geschlossene Rösselsprünge, von denen jeder in doppelter Richtung beschrieben werden kann. — In Fig. 51 haben wir noch das Beispiel eines Laquièreschen Rösselsprungs[1]), der dem Schema $A_1B_1E_1C_1$ entspricht, abgebildet. Es läßt sich schwerlich in Abrede nehmen, daß die dergestalt gebildeten Rösselsprünge einen hohen Grad von Übersichtlichkeit besitzen, wenn es auch vom Standpunkte Warnsdorfs freilich ein entscheidender Nachteil dieser Methode sein mag, „daß ein aufmerksamer Zuschauer leicht das System entdeckt".[2])

Von der Forderung bestimmter Endfelder haben wir hier, wie bei früheren Methoden auch, abgesehen und beschränken uns auf die Angabe, daß verschiedene der jetzt (S. 370) oder schon früher zitierten Autoren — wir nennen Lavernède und den an ihn sich anlehnenden Cretaine[3]), sodann Roget und nach ihm Falkener[4]), ferner de Chambure usw. — dieser Problemfassung ausführlichere Erörterungen widmen. — Von Besonderheiten war uns bereits im vorigen Paragraphen (Anm. 2, S. 368) ein „zweiteiliger" quadrupelförmiger Rösselsprung begegnet; andere dieser Art findet man bei Jaenisch[5]), sowie bei Laquière[6]), der übrigens im letzten Teil seiner Arbeit neben den zweiteiligen auch „spiralförmige" auf grund der Quadrupelmethode gebildete Rösselsprünge angibt.

§ 12. Methode von Frost.

Unter der in Anm. 3, S. 341 genannten Kollektion von kunstvollen Rösselsprüngen aus der Wiener Schachzeitung 1855 befindet sich auch der, den wir als Fig. 52 hier wiedergeben[7]):

1) Laquière, l. c. p. 14.
2) Warnsdorf, Schrift von 1823, p. 68.
3) Cretaine, l. c. p. 13—34.
4) Falkener, l. c. p. 314—318.
5) Jaenisch, „Traité", t. II, p. 42, 43, 44, 81, 88.
6) Laquière, l. c. p. 35—37.
7) Wiener Schachzeitung I, 1855, Nr. 10 der ersten Rösselsprungtafel; Haldeman, „Bibliography of the Chess Knights Tour", 1864, p. 24 gibt einen ganz ähnlichen älteren Rösselsprung, den er einer Schrift

Das Brett ist zerlegt in zwei rechteckige Gebiete von 4×5 Feldern und zwei von 3×4 Feldern; die Rösselsprünge auf den beiden Gebieten von 4×5 Feldern sind genau die gleichen, nur Spiegelbilder voneinander, und auch die beiden auf den 3×4 Feldern sind unter sich dieselben (Spiegelbilder).

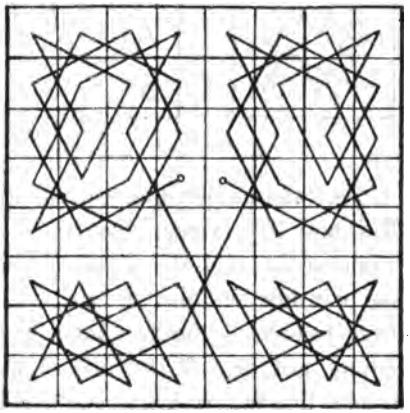


Fig. 52.

Die Zusammensetzung aus rechteckigen und hufeisenförmigen Gebietsteilen resp. den zugehörigen Teilrösselsprüngen hat A. H. Frost[1]) zu einer systematischen Methode entwickelt: er gibt zunächst Lösungen für quadratische Bretter von n^2 Feldern für $n = 5, 6, 7, 8$ und leitet dann aus diesen durch Ansetzen hufeisenförmiger Bretter mit entsprechenden Rösselketten die Rösselsprünge für Quadrate größerer Felderzahlen her. Die Rösselsprünge für $n = 5, 6, 7, 8$ selbst glauben wir hier nicht wiedergeben zu sollen, sondern dürfen uns auf die Bemerkung beschränken, daß Frost sie in der Form verwendet, daß das eine Endfeld das dritte Feld einer Randreihe ist.[2])

---

von Hirsch Silberschmidt, „Das Gambit oder Angriff und Vertheidigung gegen Gambitzüge", Braunschweig 1829, entnimmt. — Siehe übrigens auch in dem ersten Teil der Haldemanschen Schrift (s. liter. Index), p. 76 den Rösselsprung Fig. 19.

1) Frost, „On the knight's path", Quart. Journ. of Math. XIV, 1877, p. 123—125.

2) Siehe Frost, l. c. p. 123.

Frost benutzt nun besonders folgende zwei Diagramme[1]):

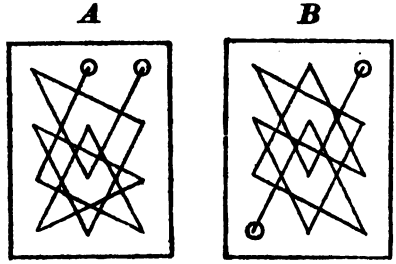


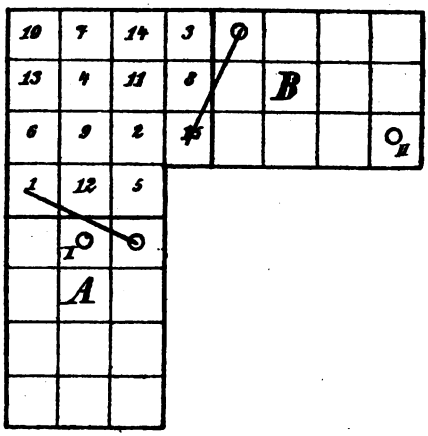
Fig. 53.

und bildet damit die hufeisenförmigen Rösselketten, die wir in Fig. 54 auf S. 377 und 378 wiedergeben.

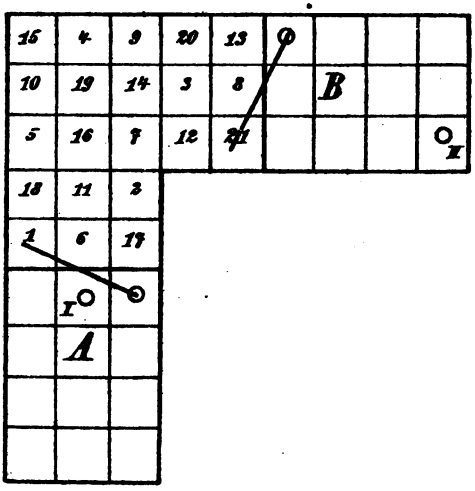
In diesen Figuren 54 sind die Endfelder der Diagramme *A* und *B*, für die wir uns im übrigen auf die oben (Fig. 53) gegebenen Figuren beziehen, durch kleine Kreise angegeben und ihre Verbindung mit dem Mittelstück bzw. untereinander durch entsprechende Linien, während die Felder des Mittelstücks nach der Reihenfolge der Durchlaufung numeriert sind. Die Endfelder der ganzen Rösselketten D_5, D_6, D_7, D_8 sind außerdem durch *I* und *II* bezeichnet. Diese hufeisenförmigen Rösselketten legt man an die dazu passenden obenerwähnten quadratischen Rösselsprünge für $n = 5, 6, 7, 8$ an, so zwar, daß dasjenige Endfeld der letzteren, das von einer Ecke aus das dritte Randfeld war, sich mit dem Endfeld *I* der betreffenden Rösselkette der Fig. 54 rösselt. Durch diese beiden sich rösselnden Endfelder kann man die hufeisenförmigen Rösselketten mit den quadratischen Rösselsprüngen verknüpfen und erhält so Rösselsprünge für $n = 8, 9, 10, 11$, und zwar ist das eine Endfeld (*II*) wieder das dritte Feld einer Randreihe. Für größere Werte von n, zunächst für $n = 12, 13, 14, 15$, erhält man dann die Rösselsprünge wieder aus den zuletzt konstruierten; die hierzu erforderlichen Rösselketten D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12} bekommt man bzw. aus D_5, D_6, D_7, D_8, indem man in diesen an *B* noch

1) Das Diagramm *A* ist nur das Spiegelbild von dem unserer Fig. 12 (S. 336) und in der gleichen Beziehung steht *B* zu Fig. 11.

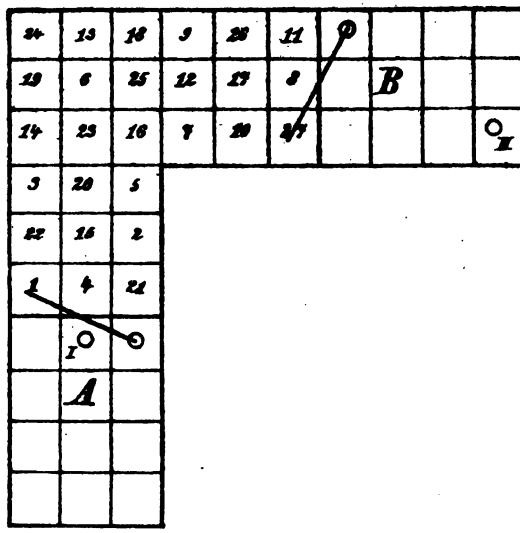
ein B (s. die Figur für D_8) und zwischen das Mittelstück und A gleichfalls ein B legt, das hier offenbar hineinpaßt und die Verbindung zwischen beiden herstellt. Die Endfelder dieser neuen hufeisenförmigen Rösselketten haben dann wieder die verlangte Lage, so daß nach diesem Prinzip die Rösselsprungbildung für quadratische Bretter beliebig weit fortgesetzt werden kann.



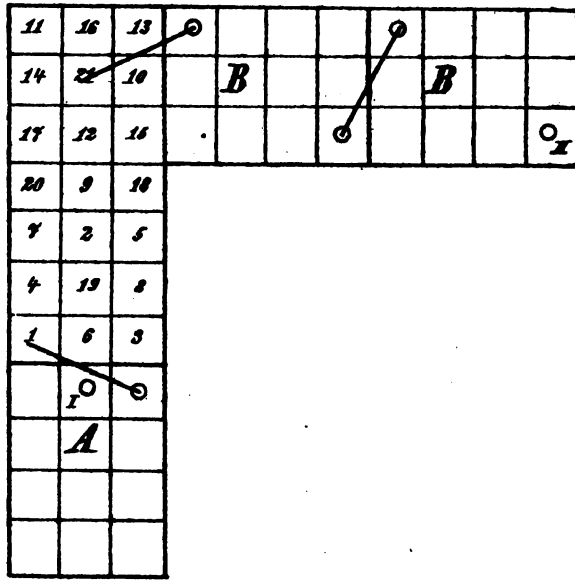
D_6



D_6


24 13 18 9 20 11
19 6 25 12 17 8
14 23 16 7 20 27
3 20 5
22 16 2
1 4 21
I
A
B
II

D_7


11 16 13
14 22 10
17 12 15
20 9 18
7 2 5
4 19 8
1 6 3
I
A
B
B
II

D_8

Fig. 54.

§ 13. Magische Rösselsprünge.

Die in § 11 unter Benutzung der Quadrupel gebildeten Rösselsprünge stehen nicht nur methodisch über anderen, durch bloßes Probieren gefundenen, sondern unterscheiden sich von diesen auch durch eine gewisse Regelmäßigkeit im Aussehen vorteilhaft. Eine vollständige (reine) Symmetrie des Rösselsprunges ist jedoch weder in bezug auf die horizontale noch die vertikale Mittellinie des Bretts noch auch in bezug auf eine Diagonale möglich.[1]) Lediglich in bezug auf den Brettmittelpunkt resp. (bei ungeradzelligen Quadraten) in bezug auf ein Mittelfeld ist eine reine Symmetrie möglich, wie sie ja die oben besprochenen Eulerschen Rösselsprünge (s. S. 331 f. und Fig. 5, S. 328) zeigten.

Eine besonders kunstvolle Form der Rösselsprünge stellen diejenigen dar, bei denen die Ziffern, die die Reihenfolge der Durchlaufung der Felder angeben, in jeder Zeile und in jeder Kolonne eine konstante Summe ergeben. Man nennt solche Rösselsprünge „gleichsummige" oder, da sie die Haupteigenschaft der — in Kapitel XII (Bd. II) zu besprechenden — „magischen Quadrate" aufweisen, auch „magische", richtiger „semi-magische". Denn vollständig „magische" Rösselsprünge in dem Sinne, wie wir diesen Ausdruck in jenem Kapitel verstehen werden, scheinen eine Unmöglichkeit zu sein: bei Gleichsummigkeit aller Zeilen und Kolonnen kann für die beiden Diagonalen die konstante Ziffernsumme anscheinend nicht erreicht werden.[2]) Wir wollen jedoch das, was wir der Terminologie des Kapitel XII gemäß „semi-magisch" nennen

1) Einen strengen Beweis hierfür gibt ein Manuskript von Flye Sainte-Marie von 1883, das Ed. Lucas vorgelegen hat; siehe Parmentiers schon S. 343 zitierte Schrift von 1891 über den Rösselsprung, p. 6, Anm. Siehe auch Wenzelides, „Bemerkungen über den Rösselsprung nebst 72 Diagrammen", Schachzeitung IV, 1849, p. 44.

2) Vgl. Parmentier, l. c. p. 14, Anm. und p. 19, Anm. Die Frage nach einem etwaigen Unmöglichkeitsbeweise (H. Delannoy im Intermédiaire des mathém., t. II, 1895, p. 8, wiederholt t. VIII, 1901, p. 129) ist bisher unbeantwortet geblieben.

müßten, der Einfachheit halber hier „magisch“ nennen. Die konstante Summe oder die „magische Konstante“ ist natürlich

$$\frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{64} i = 260.$$

Für die ersten Versuche zur Bildung gleichsummiger Rösselsprünge werden gewöhnlich Schriften[1]) aus den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts zitiert mit Rösselsprüngen, die entweder in allen Zeilen oder aber in allen Kolonnen gleichsummig sind. Wahrscheinlich gehen aber diese Versuche weiter zurück und jedenfalls finden sich in einer Schrift[2]) von 1826 bereits Vorschriften, unter Benutzung der Quadrupelmethode solche Rösselsprünge zu bilden.

1	30	47	52	5	28	43	54	260
48	51	2	29	44	53	6	27	260
31	46	49	4	25	8	55	42	260
50	3	32	45	56	41	26	7	260
33	62	15	20	9	24	39	58	260
16	19	34	61	40	57	10	23	260
63	14	17	36	21	12	59	38	260
18	35	64	13	60	37	22	11	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Fig. 55.

Der erste in allen Zeilen und Kolonnen gleichsummige Rösselsprung, der veröffentlicht wurde, rührt von William Beverley her; er wurde 1848 im „Philosophical Magazine“, den

1) Ich nenne besonders J. Brede, „Almanach für Freunde vom Schachspiel“, Altona (1844).

2) Schinnern, l. c. p. 18/19 und 25.

Herausgebern mitgeteilt durch H. Perigal, publiziert[1]) und lautet, wie in Fig. 55 angegeben. Auch die 4 Viertel des ganzen Quadrats sind magisch, indem sie in allen Zeilen und Kolonnen die konstante Summe 130 aufweisen, eine Summe, die auch die 4 Zahlen jedes der 16 vierfeldrigen Teilquadrate zusammen ergeben.

Der Beverleysche Rösselsprung ist offen; etwa gleichzeitig mit ihm veröffentlichte der pensionierte Archivar und Bibliothekar des Fürsten von Dietrichstein, Carl Wenzelides in Nicolsburg, der im Besitze mehrerer magischer Rösselsprünge war, den ersten geschlossenen.[2]) Unter den weiteren Konstrukteuren von magischen Rösselsprüngen sind besonders der Russe Jaenisch und der Deutsche Exner[3]) zu nennen. Als Beispiel eines geschlossenen magischen Rösselsprungs wollen wir einen von Jaenisch herrührenden[4]) hier angeben, den der Fig. 56, der besonders kunstvoll ist. Ist er doch nicht nur geschlossen und magisch, sondern auch symmetrisch, da die Kette 1—32 durch Drehung des Bretts um 180° in die Kette 33—64 übergeht; er läßt sich ferner in 2 getrennte geschlossene halbe Rösselsprünge

1) William Beverley, „On the Magic Square of the Knights March", Philos. Magaz. (3) XXXIII, 1848, p. 101—105. Siehe auch von Oppen, „William Beverley's Rösselsprung", Schachzeitung IV, 1849, p. 21—24; vgl. a. Wihnyk, „Zum Problem des Rösselsprungs", Deutsche Schachzeitung, 40. Jahrg., 1885; p. 98—101, 289—294.

2) Schachzeitung IV, 1849, p. 95. Fast gleichzeitig teilte der Professor Svanberg in Upsala der Redaktion der „Schachzeitung" drei weitere magische Rösselsprünge mit; auch den des Wenzelides hatte er besessen (Schachzeitung, l. c. p. 220). Bekannt geworden ist über diese Svanbergschen Rösselsprünge (?) wohl nichts (Jaenisch, „Traité" t. II, p. 143). — Posthum gab dann der Obertribunalsrat von Oppen („Rösselsprung", Schachzeitung XIII, 1858, p. 174/175) noch mehrere magische Rösselsprünge des Wenzelides heraus; vgl. dazu Schachzeitung V, 1850, p. 238 nebst Anmerkung.

3) Exner, „Der Rösselsprung als Zauberquadrat", Progr. des Gymn. zu Hirschberg 1876.

4) Jaenisch, l. c. p. 107, zuerst veröffentlicht in einem Artikel des „Chess Monthly" 1859 (s. literar. Index).

zerlegen, da 1 und 32 einer-, 33 und 64 andererseits sich rösseln.

59	11	29	63	14	37	26	35	260
23	62	41	12	25	34	15	38	260
10	40	64	21	40	13	36	27	260
61	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
53	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	3	57	44	19	30	55	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Fig. 56.

Aus jedem magischen Rösselsprung gehen durch Drehungen und Spiegelungen 7 resp., wenn er symmetrisch ist, 3 andere hervor; da nun aber jeder Rösselsprung sich umkehren läßt, ohne die „magischen" Eigenschaften zu verlieren — bei der Substitution $\begin{pmatrix} i \\ 65-i \end{pmatrix}$ bleiben diese offenbar erhalten, weil, wenn $\sum_1^8 i_k = 260$ ist, auch $\sum_1^8 (65 - i_k) = 260$ ist —, so ergeben sich aus jedem magischen Rösselsprung 15 resp. — bei symmetrischen — 7 Derivierte. In besonderen Fällen sind jedoch noch mancherlei weitere Derivate möglich, so wenn ein geschlossener magischer Rösselsprung so beschaffen ist, daß in jeder Zeile und in jeder Kolonne gerade 4 unter 33 und 4 über 32 liegende Zahlen stehen. Nennen wir nämlich die ersteren a, die letzteren b, so daß also $\sum a + \sum b = 260$ ist, so ist auch

$$\begin{aligned}\sum(33 - a) + \sum(97 - b) &= 4 \cdot 33 + 4 \cdot 97 - (\sum a + \sum b) \\ &= 4 \cdot 130 - 260 \\ &= 260.\end{aligned}$$

Man darf also dann die ersten 32 Zahlen alle von 33, die

zweiten 32 Zahlen alle von 97 subtrahieren, d. h. die Substitution

$$1,\ 2,\ \ldots.\ 32,\ 33,\ \ldots.\ 64$$
$$32,\ 31,\ \ldots.\ 1,\ 64,\ \ldots.\ 33$$

ausführen, und die neuen Zahlen stellen offenbar auch einen Rösselsprung dar, der, wie bewiesen, ebenfalls magisch ist.[1]) Andere kleine Änderungen, die in Spezialfällen zu neuen magischen Rösselsprüngen führen, sind z. B. Inversion von Quadrupeln, Verlegung einzelner Linien durch Parallelverschiebung, Verschiebung des Anfangsfeldes usw.[2])

---

1) Dies ist z. B. anscheinend übersehen in dem schon zitierten Werke von Falkener bei dem Rösselsprung Fig. 8, p. 329, der nicht wesentlich neu ist, sondern nach dem obigen Prinzip hervorgeht aus Fig. 4, Planche IV der in der nächsten Anmerkung zitierten Parmentierschen Sammlung. Übrigens sind auch die anderen zwei magischen Rösselsprünge, die Falkener gleichfalls selbst gefunden haben will (l. c. p. 328/329), ebensowenig originell.

2) Bei den Angaben über die Gesamtzahl aller bisher gefundenen magischen Rösselsprünge wird man daher immer zu berücksichtigen haben, daß dem einen als „verschieden" erscheinen kann, was dem anderen nur eine „Variante" ist. Parmentier, der in seiner (S. 343 zitierten) Schrift nebst Nachträgen (von 1892 und 1894) das gesamte ihm zugängliche Material zusammenstellte, gibt dort als Gesamtzahl der bis dahin gefundenen magischen Rösselsprünge 110 an, s. a. die Comptes rendus der „Association française" XX, 1891, t. I, p. 158 und XXI, 1892, t. I, p. 156, sowie Interméd. des mathématiciens, t. I, 1894, p. 8, Question 31. Zu diesen 110 Rösselsprüngen ist dann noch 1896 ein im „Figaro" veröffentlichter von Grossetaite hinzugekommen (briefl. Mitteilung des General Parmentier vom 11. Dez. 1900). Richard Haenel-Berlin, ein Amateur, der sich seit Jahren eingehend mit dem Rösselsprung und insbesondere dem magischen beschäftigte, bestimmte die Gesamtzahl der bisher bekannten magischen Rösselsprünge zu 242 verschiedenen, die er auf 87 Diagramme, 30 geschlossene und 57 offene, verteilte, jedoch so, daß unter diesen 87 Diagrammen nur 31 Originalkonstruktionen und 56 Varianten sich vorfinden (Mitteilungen Richard Haenels vom 29. August und 21. September 1909). Von den 110 Rösselsprüngen Parmentiers erkannte Haenel nur 30 als Originalkonstruktionen an (Brief vom 1. November 1909).

Natürlich lassen sich magische Rösselsprünge auch für andere quadratische Bretter als das gewöhnliche Schachbrett bilden.[1])

§ 14. Kubische Rösselsprünge.

Zu einer Erweiterung unseres Problems gelangen wir, wenn wir uns das aus kleinen quadratischen Feldern zusammengesetzte Brett durch einen aus kleinen Würfeln zusammengesetzten Kubus ersetzt denken und nun die kleinen Würfel als die „Felder" des Springers ansehen, von denen aus dieser sich jetzt in den 3 Dimensionen des Raumes ebenso bewegt, wie zuvor in den 2 der Ebene. Den ersten „kubischen Rösselsprung" hat wohl Vandermonde angegeben und zwar für den einfachsten, aber zugleich interessantesten Fall, den von 4^3 Feldern; denn für 3^3 Felder gibt es natürlich keinen Rösselsprung, da das Mittelfeld sich mit keinem anderen rösselt. Vandermonde befolgt hier auch eine ähnliche Methode wie in der Ebene (s. § 10, S. 365 ff.), indem er die 64 Felder zu 8 zueinander symmetrischen Ketten, jede also von 8 Feldern, anordnet und alsdann diese Ketten untereinander verbindet.[2]) Übersichtlicher als der so sich ergebende Vandermondesche ist jedoch ein von H. Schubert[3]) nach der Quadrupelmethode gebildeter geschlossener Rösselsprung, den wir daher als Beispiel hier hersetzen:

I

10	7	22	17
21	18	9	6
8	11	20	23
19	24	5	12

II

27	62	15	2
14	1	28	63
61	26	3	16
4	13	64	25

1) Wir zitieren Frolow, „Les carrés magiques", wo für ein 25-feldriges Brett 2 magische Rösselsprünge angegeben sind.

2) Vandermonde, l. c. p. 572—574.

3) Schubert, „Zwölf Geduldspiele", p. 45/46.

III

62	37	56	51
55	52	43	40
38	41	50	63
49	54	39	44

IV

57	36	47	58
48	33	58	31
29	60	35	46
34	45	32	59

Fig. 57.

Die Figuren *I*, *II*, *III*, *IV* geben dabei die 4 Schichten von je 16 Würfeln, in die der ganze Würfel zerlegt werden kann, und zwar *I* etwa die oberste usw. der Reihe nach.

Eine erschöpfende sukzessive Durchwanderung der einzelnen Schichten durch den Springer, also zunächst etwa der ganzen ersten, dann der ganzen zweiten usw., wäre nicht möglich gewesen, da ja für 4^2 Felder ein ebener Rösselsprung nicht existiert (s. S. 347). Erst durch die Ausdehnung auf 3 Dimensionen wird der Fall $n = 4$ lösbar und verdient daher, wie schon oben gesagt, hier besonderes Interesse. Für $n > 4$ lassen sich dagegen die einzelnen Schichten wie ebene Bretter erledigen, und in der Tat hat Frost, der wohl zuerst für Kuben von 5^3, 6^3, 7^3 und 8^3 Feldern Rösselsprünge angegeben hat[1]), dieses Verfahren befolgt, indem er für $n = 5$ z. B. in jeder der 5 horizontalen Schichten einen solchen Rösselsprung, wie er ihn zuvor in der Ebene gebildet hatte[2]), benutzte, nämlich einen, dessen Endfelder das erste und dritte Randfeld von einer Ecke aus sind. Die 5 Schichten werden darauf so übereinander gelegt, daß alle Anfangsfelder übereinander liegen und ebenso alle Schlußfelder. Der Würfel bietet dann mit jener

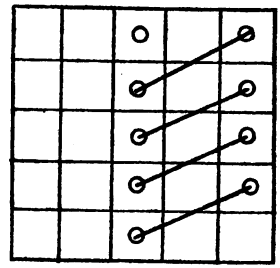


Fig. 58.

1) Quart. J. of Mathem. XIV, 1877, p. 124.

2) Frost, l. c. p. 123; s. auch S. 375 dieses Kapitels.

Seitenfläche der Endfelder den durch Fig. 58 dargestellten Anblick, und die einzelnen Rösselsprünge lassen sich, wie in Fig. 58 angegeben, leicht zu einem verknüpfen.

Auch die übrigen Fälle kubischer Rösselsprünge erledigen sich so einfach, daß ein näheres Eingehen darauf überflüssig ist.

§ 15. Anzahlbestimmungen.

Die Gesamtzahl aller auf dem gewöhnlichen Schachbrett möglichen Rösselsprünge ist natürlich eine sehr große.[1]) Eine genaue Bestimmung derselben erfordert jedoch „Rechnungen von wahrhaft unermeßlicher Länge“[2]) und ist bisher jedenfalls nicht gegeben.[3]) Außer von Volpicelli und Minding, von deren durchaus unzulänglichen Methoden zur Bestimmung aller Rösselsprünge in § 8 (S. 353 ff.) die Rede war, ist das Problem allgemein in Angriff genommen u. a. von Brunel und von F. Fitting. Brunel[4]) wendet ein allgemeines Verfahren an, das er zu-

1) Vgl. a. S. 337. — Lavernède schätzt, daß, wenn 50 Rösselsprünge auf die Seite geschrieben würden, mehr als 10000 Ries Papier erforderlich sein würden, sie alle niederzuschreiben (l. c. p. 172). — Lediglich nach Art der Endfelder — ohne Rücksicht auf den übrigen Verlauf des Rösselsprungs — gibt es 115 wesentlich verschiedene offene Rösselsprünge; siehe Deutsche Schachzeitung 28, 1873, p. 283, sowie Nash in Educational Times Repr., Bd. 53, 1890, p. 36—38. Es gibt nämlich an sich $32 \cdot 32 = 1024$ Kombinationen eines weißen und eines schwarzen Feldes; darunter sind zunächst 168 Kombinationen von sich rösselnden Feldern und von den übrigen 856 Kombinationen bilden in der Regel je 8 eine Gruppe von Stellungen, die auseinander durch Drehungen und Spiegelungen hervorgehen, während es 16 symmetrische Stellungen (gleichliegende Diagonalfelder) gibt, von denen je 4 eine solche Gruppe bilden. Dies gibt im ganzen also 115 wesentlich verschiedene

2) Minding, Crelles Journal, l. c. p. 80.

3) Gefordert u. a. in „Interméd. des mathém.“, t. X, 1903, p. 181 (Question 2625).

4) Siehe die im liter. Index unter Nr. 492 aufgeführten Arbeiten, für vorliegende Frage speziell: Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux (4) IV (1894), Procès-verbaux 1893, p. XI/XII, LIII; Mémoires (4) V (1895), p. 177 ff., Procès-verbaux 1894, p. XXXIX.

gleich für zahlreiche andere topologische Probleme, insonderheit solche, die auch in diesem Buche behandelt sind (z. B. in Kap. IV (vgl. S. 108, Anm. 1), XVI, XVII, XVIII), nutzbar zu machen bestrebt ist. Er bezeichnet, mit Rücksicht auf unseren Spezialfall gesprochen, jeden überhaupt möglichen Springerzug durch ein Symbol, so den Zug vom Felde p zu q etwa durch p_q, stellt alle diese Symbole tabellarisch, etwa in der Schreibweise einer Determinante, zusammen und sucht nun dies Schema zu exhaurieren. Dabei erhält er aber unserem Problem fremde Elemente mit in die Betrachtung hinein, nämlich die zwar über alle Felder des Brettes sich erstreckenden, jedoch in mehrere, unter sich nicht verbundene Ketten zerfallenden Springerwanderungen, und muß diese alsdann wieder ausscheiden. Vor allem erfordert aber die Methode Tabellen von ungeheurer Länge, so daß man sich nennenswerte Resultate von der weiteren Verfolgung der betretenen Bahn nicht wird versprechen dürfen. Brunel erprobte seine Methode bei diesem wie auch bei den übrigen topologischen Problemen nur an Fragestellungen, die bereits von anderen Autoren nach anderen Methoden erledigt waren, so hier an dem relativ einfachen Fall: Wie groß ist die Zahl der Rösselsprünge über ein halbes Schachbrett (4×8 Felder), wenn die beiden Endfelder vorgeschrieben sind? — Wie wir sehen werden, war zu jener Zeit die Zahl aller Rösselsprünge für das halbe Schachbrett — bei beliebigen Endfeldern — bereits von anderer Seite bestimmt. Bei dieser relativ einfachen Frage gestaltet sich jedoch das Verfahren Brunels bereits ganz außerordentlich langwierig und schwerfällig, und zwar dies in weit höherem Grade, als es bei der Art der Fragestellung an sich zu erwarten stand.

Auch von der Methode Fittings[1]) vermag ich mir einen wesentlichen Fortschritt nicht zu versprechen; immerhin muß bemerkt werden, daß für ein 36-feldriges Brett die

1) Siehe die im liter. Index aufgeführten Arbeiten aus Zeitschr. Math. Phys. 45, 1900; Arch. Math. Phys. (3) 3, 1902, sowie die Schulprogrammabhandlung von 1904.

Gesamtzahl der Rösselsprünge von Fitting bestimmt ist[1]); es sind deren — einschließlich aller Derivierten — 10298. Es wäre zu wünschen, daß die Zahl von anderer Seite und nach anderem Verfahren nachgeprüft würde.

Der Kuriosität halber sei erwähnt, daß in der „Schachzeitung" vor etwa 50 Jahren der Vorschlag gemacht war[2]), die empirische Ermittelung aller Rösselsprünge durchzuführen durch Verteilung der Arbeit unter verschiedene Mitarbeiter, deren jeder bestimmte Fälle mit allen möglichen Varianten und Untervarianten zu übernehmen gehalten sein sollte. Der anonyme Proponent machte selbst den Anfang und fand für das selbstgewählte Arbeitsgebiet so viele Lösungen, daß er seine Liste[3]) nur dann herausgeben wollte, wenn sich genügend Subskribenten fänden.

Zu erwähnen ist dann noch, daß der durch seine Untersuchungen über Sonnenflecken bekannte, verstorbene Züricher Astronom Rud. Wolf unser Problem experimentell in Angriff genommen hat.[4]) Er bezeichnete die 64 Felder des Schachbretts mit den Zahlen 1—64, zog aus einer Urne eine dieser Nummern, die ihm damit das Ausgangsfeld vorschrieb, und zog dann wieder aus einer weiteren Urne unter den von diesem Felde aus möglichen und systematisch bezeichneten Springerzügen einen, bis er zu einem Felde kam, von dem ein neuer Springerzug nicht mehr möglich war. Wolf stellte so 1000 Versuche an, von denen jeder durchschnittlich etwa $^1/_4$ Stunde erforderte. Einen vollständigen Rösselsprung erreichte er dabei überhaupt nicht, sondern nur je einen von bzw. 59, 58, 57, 56 Feldern und keinen von 60 oder mehr.

1) In der Abhandlung von 1904, p. 7—32.

2) —x. „Der geschlossene Rösselzug", Schachzeitung 16, 1861, p. 81—85.

3) Ausführliche Listen von Rösselsprüngen, gebildet nach den Methoden Eulers und Vandermondes, veröffentlichte übrigens Paul de Hijo (Abbé Jolivald) in der im liter. Index aufgeführten Schrift von 1882.

4) Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellsch. in Zürich XXXIX, 1894, p. 147—164.

Eine Erledigung hat das Problem der Anzahlbestimmung dagegen für ein Brett von 4×8 Feldern, also für ein halbes Schachbrett, durch Flye Sainte-Marie[1]) erfahren, der die 32 Felder in 2 Klassen, nämlich in die Klasse der in Fig. 59 numerierten und die der unnumerierten teilt, und nun folgendermaßen schließt: Die „äußeren Felder", d. h. die Felder der ersten und letzten Zeile, rösseln nur „innere" Felder und zwar nur solche ihrer eigenen Klasse; man kommt also zu den äußeren Feldern immer nur von einem inneren Felde. Wenn nun auch ein äußeres Feld eventuell Anfangsfeld sein kann, so muß man

1		5		9		13	
2		6		10		14	
	4		8		12		16
	3		7		11		15

Fig. 59.

doch, um zu den übrigen 15 äußeren Feldern der Reihe nach zu gelangen, jedesmal von einem inneren Felde dazu überspringen; dies erfordert 15 innere Felder, und es darf daher nur einmal auf ein inneres Feld wieder ein inneres Feld folgen. Andererseits ist dies letztere aber auch notwendig, da es nur so möglich wird, die Felder der einen Klasse an die der anderen zu reihen. Anfangs- und Schlußfeld sind daher notwendig äußere Felder[2]), woraus nebenbei folgt, daß der Rösselsprung nie geschlossen sein kann.[3]) Jeder Rösselsprung über die 32 Felder setzt sich also notwendig aus 2 Ketten

1) „Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier," Bull. soc. mathém., t. V, 1876/77, p. 144—150.

2) Diese Tatsache, ohne jedoch eine Begründung dafür beibringen zu können, gibt bereits Jaenisch, „Traité", t. II, p. 46 an und dehnt sie ibidem p. 285 auf den allgemeinen Fall eines Brettes von $4 \times n$ Feldern ($n > 2$) aus.

3) Vgl. hier S. 350: Euler.

von je 16 Feldern zusammen, von denen die eine alle Felder der einen, die andere alle der anderen Klasse umfaßt; die Endfelder jeder dieser beiden Ketten sind je ein äußeres und ein inneres Feld und zwar sind die beiden Ketten durch die beiden inneren Felder miteinander verknüpft, so daß der Verlauf sich schematisch, wenn wir unter „*ä*“ ein äußeres, unter „*i*“ ein inneres Feld verstehen, so darstellt:

$$\overbrace{äiäi\ldots äi}^{\text{Klasse I}} - \overbrace{iäiä\ldots iä}^{\text{Klasse II}}.$$

Wir bestimmen daher zunächst nur die Anzahl der Möglichkeiten, die 16 Felder einer Klasse zu durchlaufen, und zwar, je nachdem wir in 1, 5, 9, 13 (Fig. 59) anfangen. Die Bestimmung erfolgt leicht durch planmäßiges Abzählen, wobei wir bezüglich der Einzelheiten auf die zitierte Originalarbeit verweisen. Es ergibt sich so, für wieviel Rösselsprünge über alle Felder einer Klasse die einzelnen inneren Felder Endfeld sein können, nämlich

Felder	2, 16	für	118	
„	4, 14	„	42	
„	6, 12	„	32	
„	8, 10	„	54	solche Rösselketten.

Nun kann man beispielsweise an 2 nur das innere Feld der anderen Klasse anschließen, das in seiner Klasse dieselbe Lage hat, wie 6 in der ersten, in dem also 32 Rösselsprünge der zweiten Klasse endigen, so daß es also mit diesem bestimmten Übergang zwischen den beiden Klassen

$$118 \cdot 32 = 3776 \text{ Rösselsprünge}$$

für die 32 Felder gibt. In entsprechender Weise werden nun die Lösungen mit anderen Übergängen bestimmt, wobei unter Ausschluß der zu einander symmetrischen Rösselsprünge als Gesamtzahl aller Rösselsprünge über die 32 Felder sich 7772 ergibt.

Diese Untersuchungen hat Laquière[1]) benutzt, um darauf basierend für das gewöhnliche Schachbrett die Zahl aller geschlossenen zweiteiligen Rösselsprünge zu bestimmen. Die Endfelder jedes Teiles sind nach dem Obigen äußere Felder der betreffenden Hälfte und müssen, wenn der ganze Rösselsprung, wie verlangt, geschlossen sein soll, in jeder Hälfte auf der an die andere Hälfte angrenzenden Reihe liegen. Bezeichnen wir nun die Felder der zweiten Klasse ebenso wie die entsprechenden der ersten Klasse und versehen sie mit Strichen (s. Fig. 60), so wäre beispielsweise ein zweiteiliger Rösselsprung denkbar, für dessen erste Hälfte 7 und 1′ die Endfelder sind. Ein solcher 32-feldriger Rösselsprung setzt sich zusammen aus

1	3′	5	7′	9	11′	13	15′
2	4′	6	8′	10	12′	14	16′
2′	4	6′	8	10′	12	14′	16
1′	3	5′	7	9′	11	13′	15

Fig. 60.

2 Teilen, dem der 16 Felder der ersten Klasse und dem der 16 der zweiten Klasse. Die Verbindung dieser beiden Teile kann u. a. etwa durch den Übergang 2—6′ erfolgen. Mit 7 und 2 als Endfeldern gibt es aber nach Flye Sainte-Marie 16 Rösselsprünge über die 16 Felder der ersten Klasse und mit 1′ und 6′ als Endfeldern 8 für die zweite Klasse, also $16 \cdot 8 = 128$ für die 32 Felder mit 7 und 1′ als Endfeldern und 2—6′ als Übergang zwischen beiden Klassen. Die entsprechenden Zahlen für alle sonst noch möglichen Übergänge bestimmt man ebenso und findet als Gesamtzahl aller Rösselsprunge der 32 Felder der einen Schachbretthälfte mit 7 und 1′ als Endfeldern: 772. Die gleiche Bestimmung führt man für alle möglichen anderen

1) „Note sur le nombre des marches rentrantes etc.“, Bull. soc. math. IX, 1881, p. 11—17 = „Géométrie de l'échiquier“ (s. hier S. 370, Anm. 5), p. 50—56.

Kombinationen von Endfeldern aus und in ähnlicher Weise, wie zuvor 2 Züge von je 16 Feldern, verbindet man jetzt deren zwei von je 32 Feldern und findet dann als Gesamtzahl aller zweiteiligen geschlossenen Rösselsprünge überhaupt 31054144.[1])

Dabei sind 2 zueinander symmetrische Rösselsprünge für zwei gezählt, desgleichen die sich nur durch die Durchlaufungsrichtung unterscheidenden, sowie diejenigen, die dadurch auseinander hervorgehen, daß das Schachbrett ja auf zwei Arten, nämlich durch eine horizontale und durch eine vertikale Mittellinie, in 2 Hälften zerlegt werden kann.

§ 16. Das Problem des Brettablaufs für die übrigen Schachfiguren.

Im Anschluß an das Rösselsprungproblem mögen in diesem Paragraphen für die anderen Figuren[2]) des Schachspiels entsprechende Fragestellungen erhoben werden, wenn auch hier die Beantwortung erheblich einfacher ist und uns z. T. auch nur mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung (s. in Bd. II: Kap. XIX, § 5) interessiert. Wir beginnen mit folgender Aufgabe:

Auf einem beliebigen rechteckigen Brett von $m \times n$ Feldern soll ein Turm, von einem beliebigen Feld ausgehend, der Reihe nach alle Felder, jedes jedoch nur einmal, passieren und zu dem Ausgangspunkt zurückkehren, wobei ein Feld, über das der Turm hinweggegangen, auch als passiert angesehen werden soll und daher nicht mehr zum zweiten Male passiert werden darf.

Wenn der Turm wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren soll, so muß offenbar jede seiner Bewegungen durch eine parallele, aber entgegengesetzt gerichtete gewissermaßen wieder

1) Laquière, l. c. („Géométrie de l'échiquier"), p. 55.

2) Bezüglich der Gangarten der Figuren verweisen wir den damit etwa nicht vertrauten Leser auf Kap. IX, § 2 (S. 213/4) und Anhang (S. 274).

aufgehoben werden; es folgt daraus ohne weiteres, daß die Aufgabe nur dann lösbar ist, wenn die Anzahl der Felder gerade, also wenigstens eine der Größen m und n gerade ist. Dasselbe sieht man auch sofort dadurch ein, daß bei einer schachbrettartigen Ausführung der Felder in zwei Farben der Turm bei jedem Zuge von einem Feld bis zum benachbarten die Farbe wechselt, also nur bei gerader Anzahl zum Ausgangsfeld zurückkehren kann. Diese Bedingung der geraden Felderzahl ist aber auch hinreichend; die Fig. 61 gibt für einen speziellen Fall

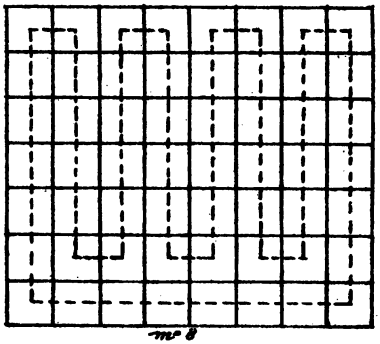


Fig. 61.

eine Lösung, die entsprechend offenbar für jeden Fall eines geraden $m \cdot n$ möglich ist.[1]) Ist $m \cdot n$ dagegen ungerade, so ist die Aufgabe nicht lösbar, jedoch können dann $mn - 1$ Felder nacheinander in der vorgeschriebenen Weise passiert werden, wie sich leicht folgendermaßen ergibt: Von den $m \cdot n$ Feldern denken wir uns eins, etwa das links unten in der Ecke, fort und lösen nun zunächst in derselben Weise wie in Fig. 61 die Aufgabe für $(m-1) \times n$ Felder; die in Fig. 62 hierfür angegebene Bahn setzt sich aus einer ausgezogenen und gestrichelten Linien zusammen. Denkt man sich die ausgezogene Linie nun fort und durch die gekreuzte (× × × × × ×) ersetzt, so hat man

1) Die Frage nach der Zahl der Lösungen lassen wir hier unberührt. Vgl. jedoch die nur anders eingekleidete Question 2624 im Interméd. des mathém. X, 1903, p. 181 und die Lösung von C. Flye Sainte-Marie für $m = 4$, n beliebig, in t. XI, 1904, p. 86–88.

die gesuchte Bahn für die $mn - 1$ Felder. — Aus dem Obigen folgt sofort, daß, wenn die Endfelder des Turmbrettablaufs vorgeschrieben sind, der Ablauf, der dann in der Regel „offen“

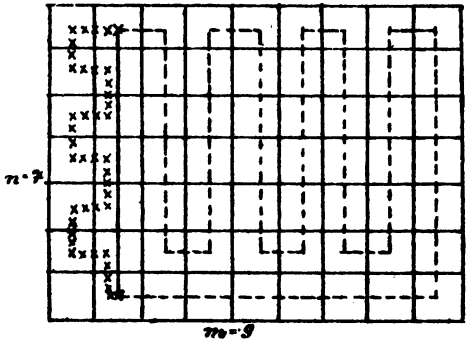
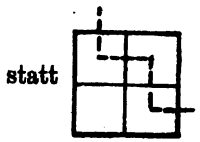
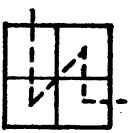


Fig. 62.

wird sein müssen, bei gerader Felderzahl nur möglich ist, wenn die Endfelder von verschiedener Farbe, bei ungerader Felderzahl, wenn sie von gleicher Farbe sind, während andernfalls mindestens ein Feld unberührt bleiben müßte.[1])

Wenden wir uns nun zu den übrigen Figuren des Schachspiels, so sehen wir zunächst, daß für König und Königin ein geschlossener Brettablauf auf jedem rechteckigen Brett möglich ist; denn sie dürfen den oben angegebenen Weg des Turms (Figuren 61 und 62) beschreiben und brauchen, falls für diesen die Aufgabe nicht lösbar ist und ein Feld unpassiert bleibt, nur





1) Vgl a. Interméd. des mathém., II, 1895, p. 9/10, Question 433.

2) Bei dieser Wanderung der Königin setzt sich ihre Bahn für das gewöhnliche Schachbrett aus mindestens 16 Zügen zusammen.

Für den Läufer, der stets an eine bestimmte Farbe gebunden ist, bleiben natürlich die Felder der anderen Farbe stets unerreichbar; aber auch wenn wir nur fordern, daß alle Felder der betreffenden Farbe bestrichen werden, ist eine geschlossene Bahn nur in vereinzelten Fällen möglich. Zunächst darf unter den Feldern der betreffenden Farbe offenbar kein Eckfeld sein, da dieses für den Läufer nur einen Zugang hat. Im Bereich der Möglichkeit liegt also eine vollständige geschlossene Läuferwanderung über alle Felder einer Farbe von vornherein nur dann, wenn das rechteckige Brett in beiden Dimensionen eine ungerade Anzahl von Feldern aufweist, und es kommen dann auch nur die Felder der Farbe in Betracht, die nicht in den Ecken vorkommt. Man erkennt aber an der Figur (z. B. Fig. 1, Kap. VII, S. 172) leicht, daß auch hier nur 2 Fälle übrig bleiben, nämlich die der quadratischen Bretter von 9 und 25 Feldern.

Verlangt man dagegen nicht gerade eine geschlossene, sondern nur eine zusammenhängende, alle Felder der Farbe umfassende Bahn, — eine Bedingung, unter der die entsprechende Aufgabe für den Turm stets lösbar, aber auch trivial ist, — so ist unsere Aufgabe bei richtiger Wahl des Anfangsfeldes noch in folgenden Fällen lösbar:

1) für alle quadratischen Bretter von ungerader Felderzahl,
2) für alle rechteckigen Bretter von $m \times n$ Feldern, wenn m und n ungerade sind und der Unterschied zwischen beiden $= 2$ ist,

beide Male jedoch nur für diejenige Farbe, die nicht die der Eckfelder ist. — Dazu kommt dann noch

3) der triviale Fall eines Brettes von $2 \times n$ Feldern (n beliebig) für die Felder beider Farben.

Fordert man jedoch nur, daß jedes Feld mindestens einmal passiert wird, ohne eine mehrmalige Passage desselben Feldes zu verbieten, so läßt sich das Verlangte in 14 Zügen leisten, z. B. in der gewöhnlichen deutschen Schachfeldernotation (Fig. 1, S. 172): $a1 - a8 - h8 - h1 - b7 - h7 - b1 - b5 - f1 - c1 - g5 - g1 - b6 - f6 - a1$ (vgl. S. Loyd, „The Queens Tour“ in Cook, Henry and Gilberg, „American Chess-Nuts“, New-York 1868, p. 396).

Man erkennt dies leicht folgendermaßen: Zunächst darf offenbar — abgesehen von den unter 3) aufgeführten und nicht weiter interessierenden Fällen von $2 \times n$ Feldern — auch jetzt kein Feld der betreffenden Farbe Eckfeld sein; denn selbst als Endfelder könnte man die beiden Eckfelder der betreffenden Farbe — f in Fig. 63 sei eins davon[1]) — nicht in Aussicht nehmen, da auch die Randfelder b und d nur je zwei Ausgänge haben und man also stets, wenn die Felder b und d berührt werden sollen, in der Richtung $a-b-c-d-e$ (resp. $a-b-c-d$, wenn das Brett nur 3 Kolonnen hat) oder umgekehrt fortschreiten und damit f ganz ausschließen müßte. Daher müssen, wenn auf dem rechteckigen Brett von $m \times n$ Feldern überhaupt eine ungeschlossene Läuferwanderung über alle Felder einer Farbe möglich sein soll, m und n ungerade sein, und es kommen dann auch nur die Felder der nicht in den Brettecken vertretenen Farbe in Betracht. Weiter sieht man leicht, daß man, von einem Randfeld ausgehend, ohne Mühe alle Felder der beiden äußeren Banden passieren kann (s. das Äußere der Fig. 64), so daß dann nur noch die Felder eines rechteckigen Brettes von $(m-4) \times (n-4)$ Feldern zu passieren sind. Andererseits muß aber die Durchlaufung der Felder der beiden äußeren Banden auch in dieser Weise erfolgen, da jedes Randfeld für den Läufer nur 2 Zugänge hat (s. z. B. Fig. 64, in der — für den Fall von 7×9 Feldern — die Felder der einen Farbe durch Punkte, die der anderen durch kleine Kreise

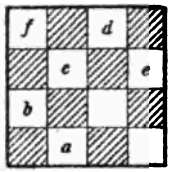


Fig. 63.

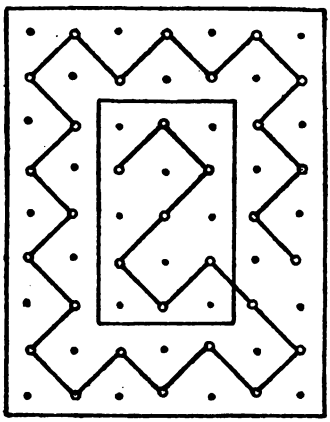


Fig. 64.

1) Am unteren und am rechten Rande der Figur setzt sich das Brett also eventuell fort.

angedeutet sind). Ein solches Gebiet der zwei äußeren Banden, das ja auch beim Rösselsprungproblem (s. § 9, S. 357ff.) eine Rolle spielte, wollen wir kurz einen „Rand von Zweifelderbreite" nennen und auf demselben eine „innere" und „äußere" Seite unterscheiden. Die äußere Seite enthält stets 4 Felder mehr als die innere. Die Durchlaufung eines solchen Randes geschieht in der Weise, daß auf ein inneres Feld stets ein äußeres folgt und auf ein äußeres auch stets ein inneres außer an den 4 Ecken, wo auf ein äußeres wieder ein äußeres folgt. Beginnt die Durchlaufung eines solchen Randes also auf einem inneren Felde, so endigt sie jedenfalls auf einem äußeren.

Für ein vorgelegtes Brett von $p \times q$ Feldern (p und q beide ungerade) kann unsere Aufgabe also höchstens dann lösbar sein, wenn sie es für ein Brett von $(p-4) \times (q-4)$ Feldern ist. Dies führt uns dazu, zunächst die einfachsten Fälle der Bretter von $m \times n$ Feldern zu untersuchen, nämlich diejenigen, in denen die kleinere der Größen m und n, etwa m, 1 oder 3 ist. Für $m = 1$ muß $n = 1$ oder $n = 3$ sein, während $n \geqq 5$ zu $m = 1$ bereits keine Lösung mehr liefert, wie man leicht sieht, und $m = 3$ bedingt entsprechend: $n = 3$ oder $n = 5$. Nun sind aber diese Fälle:

$$m = 1,\ n = 1 \text{ oder } 3$$
$$m = 3,\ n = 3 \text{ oder } 5$$

nicht nur selbst lösbar, sondern dies gilt auch von allen denjenigen, die sich aus ihnen ergeben, indem wir um diese Bretter sukzessive „Ränder von Zweifelderbreite" herumlegen. Ist nämlich zunächst $m = 1$, $n = 1$ oder, wie wir gleich besser annehmen: $m = 5$, $n = 5$, so haben wir nur einen „Rand" mit einem Feld der anderen (nicht in Betracht kommenden) Farbe in der Mitte und brauchen nur auf der inneren Seite des Randes zu beginnen und beendigen dann, wie oben angegeben, die Durchlaufung auf der äußeren Seite; von hier aus können wir dann auf die innere Seite eines eventuellen weiteren Randes übertreten und diesen wieder wie oben durchlaufen, um auf einem äußeren Felde diese Durchlaufung zu beschließen usw. Für

$m = 3$, $n = 3$ haben wir nur 4 Felder zu durchlaufen, von deren jedem ein Übergang zu einem herumgelegten Rand möglich ist, so daß sich dieser Fall ebenso wie der vorige erledigt und damit die oben behauptete Möglichkeit für jedes Quadrat ungerader Felderzahl dargetan ist. Für $m = 1$, $n = 3$ hat man von der betreffenden Farbe nur ein Feld und kann von diesem dann zu der inneren Seite eines etwaigen Randes übertreten und die Felder dieses Randes darauf durchlaufen, um auf einem äußeren Felde desselben zu endigen und von hier eventuell auf einen weiteren Rand überzugehen usw. Für $m = 3$, $n = 5$ sind die 7 Felder der betreffenden Farbe leicht hintereinander zu durchlaufen (s. das Innere der Fig. 64), wobei die Endfelder beide äußere Felder sind, so daß sich an jedes der beiden Enden die Durchlaufung etwaiger Ränder anschließen läßt. Damit ist aber auch der oben angegebene zweite Fall erledigt

Zusätze.

Zu S. 8, Anm. 1 und weiteren Stellen: Die vielen Verweise auf Édouard Lucas, „Récréations mathématiques“ beziehen sich, auch wo dies nicht gesagt ist, bei Bd. I und II stets auf deren 2. Ausgabe.

Zu Kapitel III, § 1 (Zahlensysteme), S. 30/31 nebst Anm. 1, S. 31:

Gegen die bisherigen Erklärungstheorien für das Sexagesimalsystem der Babylonier, auch gegen die von uns zitierte von G. Kewitsch, wandte sich E. Hoppe in einem Vortrage vor der Salzburger Naturforscherversammlung (Sept. 1909).

Zu Kapitel III, § 3, VII („Nim“), S. 72—88:

Der hervorragende amerikanische Mathematiker E. H. Moore hat dem Nim-Spiel eine allgemeinere Form gegeben und für diese eine mathematische Theorie entwickelt, deren Veröffentlichung in den „Annals of Mathematics“, second series, vol. XI, 1910, p. 93—94, erfolgt ist. Das Nim_k, wie Moore seine Spielform im Gegensatz zu dem gewöhnlichen Nim oder Nim_1 nennt, erfordert n Haufen von Objekten und wird in der Weise gespielt, daß die Spieler auch wieder abwechselnd beliebige Anzahlen von Objekten von den Haufen fortnehmen, jedoch jetzt mit dem Unterschied, daß sie in demselben „Zuge“ auch gleichzeitig Objekte von 2, 3 ... bis k verschiedenen Haufen fortnehmen dürfen. Die Größe k ist dabei für ein- und dieselbe Partie konstant, kann aber zu Beginn jeder Partie von neuem willkürlich — natürlich $< n$ (der Grenzfall $k = n$ ist trivial) — festgesetzt werden. Wer den letzten Stein erhält, ist Sieger. — Als „richtig“ sind alsdann diejenigen „Positionen“ zu definieren, bei denen in dyadischer Darstellung der n Zahlen sich in allen Vertikalreihen eine Summe ergibt, die Null oder ein Vielfaches von $(k + 1)$ ist.

Zu S. 145, Zeile 7 der Anm. 1: Die betreffende Stelle bei Ozanam siehe in der Ausgabe von 1696, p. 71 f. (Problème XXI).

Zu S. 164/165: Eine Änderung resp. Ergänzung der dortigen Ausführungen, insbesondere auch derjenigen von Anm. 4, war in dieser 3. Ausgabe nicht möglich. Erwähnt sei nur, daß auch Emanuel Lasker, der

bisherige langjährige Weltschachmeister, das „Remis“ als den Ausgang einer „idealen“, d. h. von beiden Seiten fehlerfrei gespielten Schachpartie annimmt.

Zu S. 374/5, Anm. 7: Ein Rösselsprung, bei dem das Schachbrett gleichfalls in zwei Rechtecke von 4×5 und zwei von 3×4 Feldern, wenn auch in anderer Anordnung, zerlegt ist, findet sich schon im „Reichs-Anzeiger“ vom Jahre 1797, Nr. 216, 18. Sept., col. 2322, und zwar ist der Verfasser derselbe wie der des von uns S. 323, Anm. 2 zitierten Artikels, also vermutlich Herzog Ernst II. von Sachsen-Gotha.

Zu S. 383, Anm. 3: Herr Emil Lange in Hamburg erhebt Anspruch darauf, zu den Haenelschen magischen Rösselsprüngen noch sieben weitere, die Haenel als verschieden von den ihm bekannten anerkannt habe, hinzugefunden zu haben.